

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра вычислительных методов механики деформируемого тела

Макунин Алексей Вячеславович

Магистерская диссертация

Моделирование внутренних задач гидродинамики
на основе f - модели турбулентности

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа надежность и безопасность сложных систем

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Павловский В.А.

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Аннотация	3
Введение	4
1 Современное состояние теории турбулентности	8
1.1 Актуальные проблемы современной гидродинамики	8
1.2 Вычислительная гидродинамика	11
1.3 Турбулентность в ANSYS	14
1.4 f – модель турбулентности	16
2 Ламинарное течение в круглой трубе	19
2.1 Течение Пуазейля в трубе	19
2.2 Течение в начальном участке круглой трубы	21
2.3 Закон сопротивления для течения в трубах	21
3 Феноменологическая f– модель турбулентности	27
3.1 Физический смысл функции f	27
3.2 Система уравнений модели	34
3.3 Определение феноменологических констант	37
4 Расчет течения жидкости в круглой цилиндрической тру- бе на основе f– модели	46
4.1 Постановка задачи о течении в трубе	46
4.2 Численный расчет и сравнение результатов	49
4.3 Верификация на основе ламинарного течения	52
4.4 Интегрирование задачи в рамках f – модели	53
Заключение	55
Список литературы	56

Аннотация

В данной магистерской диссертации производится численный расчет характеристик турбулентного течения жидкости на основе $k-\epsilon$ модели турбулентности. В качестве объекта исследования взято течение несжимаемой вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе. В исследовании задействованы методы механики сплошных сред, гидродинамики, численные методы решения краевых задач, а также аналитические методы. Характеристики течений, рассчитанные по изложенным расчетным методикам, сравниваются с известными экспериментальными данными и результатами, полученными ранее другими авторами.

Введение

К концу позапрошлого столетия развитие гидродинамики подошло к этапу, когда ее дальнейшее существование как единой науки, использующей в своих построениях строгий математический аппарат, стало невозможным. Это объясняется тем, что ввиду быстрых темпов развития техники и появления новых технических устройств, возник спрос на количественные характеристики реальных величин, которые в силу сложности рассматриваемых процессов, современная на тот момент гидродинамика дать не могла. Это привело к тому, что дальнейшее развитие этой науки пошло по двум различным путям. Первый – это теоретическая гидродинамика, основанная на уравнениях Эйлера движения жидкости при отсутствии сил трения. Иной подход – это принявшая отчетливый эмпирический характер, основывающаяся в большинстве своем на экспериментальных данных и радикально отличающаяся от теоретической методиками и спектром решаемых задач – гидравлика [1].

Решение обширного спектра гидродинамических задач подразумевает применение строгого математического аппарата интегрирования дифференциальных уравнений, лежащих в основе математической модели, которая служит эквивалентом рассматриваемой задачи, а также граничных и начальных условий. Суммарные характеристики, описывающие процесс, находятся из довольно общих теорем механики - законов сохранения количества движения, массы, энергии и других. Большая сложность, однако, состояла в том, что результаты, полученные методами классической гидродинамики, во многом шли вразрез с результатами опытов. Особенно резко это коснулось в таких важных с практической точки зрения вопросах, как расчет сопротивления, оказываемого жидкостью на движущееся в ней тело, нахождение характеристик потока жидкости вблизи твердой стенки и др.

В начале прошлого века были выведены уравнения движения жидкости с учетом вязкого трения (уравнения Навье-Стокса). Но из-за больших математических трудностей в нахождении их аналитических решений, применить эти уравнения для решения задач о течении жидкости при наличии трения удавалось только редких частных случаях.

В идеальной жидкости касательные силы отсутствуют и на поверх-

ности соприкосновения твердого тела с жидкостью имеется разность касательных скоростей, то есть происходит скольжение жидкости. Напротив, в действительной жидкости на обтекаемую твердую стенку передаются касательные силы, что приводит к прилипанию жидкости к стенке[2]. В данной работе будет рассматриваться идеальная вязкая жидкость.

Следующим значимым шагом в развитии этой теории стало введение в 1904 году Прандтлем понятия пограничного слоя [2]. Эта гипотеза, помимо своей физической наглядности в описании важной роли вязкости в задаче о сопротивлении вязкой жидкости, дала возможность преодолеть математические трудности и теоретически исследовать жидкости с трением. До сравнительно недавнего времени теоретические исследования динамики жидкости в большинстве своем проводились для идеальной (несжимаемой и не обладающей трением) жидкости. Влияние трения и сжимаемости в заслуживающей того степени стало учитываться гораздо позднее. При движении жидкости без трения между слоями, в рассмотрение входят только нормальные силы (давления). Касательные же силы (напряжения сдвига) в такой модели отсутствуют. Касательные силы связаны с наличием у жидкости вязкости. В идеальной жидкости также отсутствует трение между жидкостью и твердой стенкой и вводится понятие скольжения жидкости вдоль стенки. В действительных жидкостях действуют как нормальные, так и касательные силы, возникающие между слоями жидкости и на границе жидкости и поверхности обтекаемого ею тела, а также между жидкостью и твердой стенкой, что приводит к прилипанию жидкости к стенке [1].

На сегодняшний день, все теории, описывающие турбулентность, являются полуэмпирическими, то есть для их построения используются данные, полученные в результате экспериментов. Подобно описанной ситуации, когда в рамках одного раздела науки имеется дело с почти не пересекающимися между собой путями исследования, в современной гидродинамике отдельно изучаются две условные группы турбулентных течений. Первая – это полуэмпирические теории турбулентности (Прандтль, Карман, и др.), в которых устанавливаются алгебраические соотношения между касательными напряжениями и градиентами осредненных скоростей. Вторая группа – это интенсивно развивающиеся в настоящее время мето-

ды численного интегрирования средствами ЭВМ уравнений Рейнольдса с помощью различных моделей турбулентности, которые носят чисто эмпирический характер.

Схематически, такой метод можно представить как совокупность уравнений Рейнольдса и модели турбулентности, благодаря которой замыкается полученная система уравнений. В сравнении с полуэмпирическими теориями из первой группы, численные методы дают возможность исследовать гораздо более широкий спектр турбулентных течений, в первую очередь в связи с наличием большего числа эмпирических констант, необходимых для реализации метода на ЭВМ. Помимо этого, необходимо также задавать и «пристенные функции» - в том случае, если производится расчет вблизи границы с твердой стенкой.

Ламинарный и турбулентный режимы течений в современной гидродинамике также рассматриваются отдельно. Следствием данного подхода является возникновение обособленных друг от друга и разных по своему содержанию теорий этих режимов течения. В рамках каждого из них имеют место свои реологические соотношения, которые приводят к разным выражениям ряда гидродинамических характеристик, среди которых профили скоростей и переменные, описывающие рассматриваемое течение в рамках выбранной модели. Это иллюстрирует тот факт, что задачи о рассмотрении перехода потока из ламинарного режима течения в турбулентный нетривиальны и по сей день требуют детального рассмотрения [36].

Определяющим фактором при выборе математической модели течения является критическое число Рейнольдса $Re_{кр}$, которое характеризует переход от ламинарного режима течения к турбулентному и зависит от типа геометрии течения. К примеру, для круглых труб $Re_{кр} \approx 2300$. В некоторых случаях, если течение не достаточно исследовано экспериментально (например, при проектировании нового оборудования), становится невозможным точно указать $Re_{кр}$ и в результате невозможно достоверно утверждать, с каким режимом течения предстоит иметь дело. Между тем, использование математической модели течения, несоответствующей реальной картине, то есть являющейся результатом изначально неверного предположения - естественно - самым критическим образом скажется на достоверности результатов подобных расчетов.

Существующие модели турбулентности нельзя считать универсальными, т.к. точность и достоверность результатов, полученных при их применении к различным видам турбулентных течений, будут различаться. Это означает, что исследования в области гидродинамики турбулентных течений далеки от завершения. Сама по себе проблема описания турбулентности является многоплановой и нетривиальной и, как упоминалось, не решена в рамках какого-то одного подхода.

Решить эту проблему на чисто феноменологическом уровне можно с помощью феноменологической модели, разработанной В. А. Павловским [17]. Данная модель является своего рода альтернативой гипотезе длины пути перемешивания Прандтля и получила название f – модели. Для исследования f – модели на предмет ее работоспособности, в настоящей работе будет рассматриваться внутреннее течение Пуазейля, ввиду широкой распространенности данного вида течения.

Цели исследования

- Изучение природы турбулентности и актуальных методов ее исследования.
- Рассмотрение течения Пуазейля в гладкой цилиндрической трубе.
- Применение f - модели турбулентности для расчета внутренних течений.
- Формулировка математической модели рассматриваемого течения.
- Разработка и верификация алгоритма численного решения данной задачи.
- Получение численных результатов для различных чисел Рейнольдса.
- Получение аналитического решения задачи для различных чисел Рейнольдса.
- Сопоставление численных результатов с аналитическим решением и имеющимся экспериментальными данными.

1 Современное состояние теории турбулентности

1.1 Актуальные проблемы современной гидродинамики

При рассмотрении течений различных видов, возникает фундаментальный вопрос: при каком условии течения каких-либо жидкостей около геометрически подобных тел при одинаковых направлениях натекания будут геометрически подобны картины линий тока этих течений? Согласно [2], таким критерием механического подобия двух течений является число Рейнольдса Re .

Каждому типу геометрии течения соответствует также свое критическое число Рейнольдса $Re_{кр}$, которое характеризует переход течения потока жидкости из ламинарного режима в турбулентный. $Re_{кр}$ является определяющим фактором при выборе модели течения жидкости (для круглой трубы, к примеру, $Re_{кр} \approx 2300$). Следует также отметить тот факт, что в определенных случаях (к примеру, при разработке нового устройства было получено новое, мало исследованное экспериментально течение), указать значение $Re_{кр}$ становится проблематично. Как упоминалось во введении, такая неясность приводит к невозможности дать точный ответ на вопрос о выборе той или иной модели течения.

Применение моделей турбулентности на практике приводит к значительному упрощению использования специальных вычислительных комплексов, содержащих широкий перечень математических моделей, описывающих течения жидкости и предназначенных для расчетов разнообразных течений [3]. Однако, всякий раз, когда рассматривается определенное турбулентное течение, возникает также и проблема в выборе модели турбулентности. Эта проблема обусловлена тем, что каждая такая модель ориентирована на некоторый класс течений, для которого её использование является особенно эффективным. На выбор модели турбулентности зачастую оказывают влияние и другие параметры, такие как необходимая точность ожидаемого результата и имеющиеся ресурсы: как вычислительные, так и временные [4].

Существующие модели турбулентности, как уже говорилось, нельзя считать универсальными, поскольку их применение к различным классам турбулентных течений не позволяет получать результаты одинаково высокой степени точности и достоверности. Это означает, что научные исследования в области гидродинамики турбулентных течений, в том числе и в рамках феноменологического подхода, по-прежнему остаются незаконченными.

Проблема описания турбулентности является нетривиальной и многоступенчатой и до настоящего времени остается неразрешимой в рамках какого-то одного подхода. С другой стороны, разносторонний подход к ее рассмотрению и использование различных методов исследований дает надежду на значительное продвижение. В связи с этим, полезным может оказаться такой новый подход к описанию течений вязкой жидкости, который был бы основан на использовании реологического соотношения, являющегося независимым от режима течения, и удовлетворительно, в согласии с опытом, описывал бы поле осредненных скоростей и трение на стенках для каждого конкретного числа Рейнольдса [37,38]. В настоящее время принимаются попытки разработать подобную модель.

Достичь этой цели можно также и на чисто феноменологическом уровне, проводя анализ обширных экспериментальных данных о течениях вязкой жидкости, по большей части в турбулентном режиме - для ламинарного режима теория и опыт хорошо согласуются. Основы такой феноменологической модели, являющейся в некотором смысле чисто феноменологической альтернативой гипотезе длины пути перемешивания Л. Прандтля, содержатся в работе В. А. Павловского [5]. За основу данного исследования взята именно эта феноменологическая теория течения вязкой жидкости. Эта модель получила название « f — модель» турбулентности, благодаря феноменологической величине f , характеризующей меру турбулентности. Теория нуждается в дальнейшем развитии и распространении ее на различные виды течений.

Турбулентный режим течения чрезвычайно сложен для теоретического описания, поскольку поля физических величин, гидродинамических характеристик потока, изменяются случайным образом - как в пространстве, так и во времени. При этом частота этих изменений весьма высока

[6]. Из-за этого проблема об описании турбулентности до сих пор не нашла своего окончательного решения, поскольку невозможно описать поведение рассматриваемой величины (скорость, плотность, давление и др.) во всех деталях, как функцию, зависящую лишь от координат и, если поток не стационарен, времени. Тем не менее, достоверная теория для данного типа течения, в силу его распространенности на практике, является весьма востребованной.

Наблюдения показывают, что вместе с хаотичностью имеет место некоторая регулярность картины течения во времени и пространстве. А именно, в некоторой фиксированной точке потока регулярно повторяется с течением времени одна и та же картина течения. С другой стороны, в некоторой фиксированный момент времени одна и та же картина течения регулярно повторяется в пространстве. Эти факты свидетельствуют о том, что теоретическое описание турбулентных потоков возможно. При рассмотрении турбулентности могут быть выделены статистически точные осредненные значения рассматриваемых величин и их корреляций (осредненных по времени и пространству). Это позволяет изучать физические закономерности, характеризующие ее. В настоящее время в теории турбулентных течений развивается несколько различных направлений [5]. Поскольку пульсации гидродинамических характеристик представляют собой случайные поля-процессы (их неупорядоченное изменение происходит как в пространстве, так и во времени), то наиболее естественным математическим аппаратом для их описания является теория случайных полей в самой общей постановке. Однако, несмотря на то, что данный подход развивается уже более полувека, в теоретическом плане его успехи ограничиваются в основном исключительно однородной и изотропной турбулентностью, попытки же развития статистического подхода на наиболее интересные с точки зрения практики неоднородные сдвиговые течения оказались безуспешными. В связи с развитием вычислительной техники и совершенствованием вычислительных алгоритмов и процедур, все большее внимание уделяется расчету турбулентных течений исходя непосредственно из уравнений Навье - Стокса - метод прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) [8]. Недостатками данного подхода являются затраты рабочего и машинного времени, и необходимость в каждом кон-

кретном случае тщательной проверки адекватности используемых приближенных уравнений [39-41]. В последнее время особое внимание уделялось системам нелинейных неконсервативных дифференциальных уравнений с детерминированными параметрами, приводящими (в некотором интервале значений этих параметров) к столь неупорядоченным решениям задач, что описываемые ими поля величин уместно рассматривать как случайные. Такого рода решения весьма неустойчивы, сильно реагируют на малые изменения начальных и граничных условий. Но это касается только самих неизвестных, а не их осредненных значений, которые, как правило, весьма устойчивы.

Интересны так же попытки трактовать турбулентные течения через призму уравнений больцмановского типа. В обоих случаях кинетические уравнения понимаются не буквально, а как дальнейшее развитие представлений Рейнольдса и Прандтля о том, что турбулентные течения могут рассматриваться как квазимолекулярные движения элементарных объемов жидкостей.

1.2 Вычислительная гидродинамика

В связи с ростом мощности компьютеров и совершенствованием вычислительных алгоритмов стремительно развивается вычислительная гидродинамика (ВГД), в которой также существует несколько подходов к вопросу о моделировании турбулентных течений. Эти подходы базируются либо на использовании уравнений Навье-Стокса в исходной форме, либо на их модификациях [9] с аппроксимацией членов, из-за чего из рассмотрения исключаются мелкомасштабные турбулентные пульсации. Основными методами являются прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation - DNS), метод крупных вихрей (Large Eddy Simulation - LES) и решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes - RANS) [8]. Существуют также и различные комбинированные подходы, содержащие в себе черты выше перечисленных подходов: RANS, LES и DNS. Методы прямого численного моделирования и крупных вихрей позволяют получать более качественную картину турбулентности, чем RANS, однако их использование связано с большими вычислительными затратами, особенно это касается DNS. Поэтому самым

распространенным на сегодняшний день в вычислительной гидродинамике является RANS [42].

Наибольшие успехи прикладной теории турбулентности связаны с феноменологическим подходом [7, 10, 11-12]. Такой подход основан на преобразованных уравнениях Навье-Стокса. Изменение масштаба осреднения в них (осреднение по Рейнольдсу), превращает их в уравнения течения особой сплошной среды — «жидкости Рейнольдса». Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса дают возможность исследовать турбулентные течения, опираясь не на мгновенные пульсационные значения скорости и давления, а на их статистически точные осредненные характеристики. Однако система, состоящая из уравнения течения «жидкости Рейнольдса» и уравнения неразрывности даже для несжимаемой жидкости не является замкнутой, ввиду чего необходимы дополнительные определяющие соотношения — реологические уравнения состояния. Основополагающими при построении этих соотношений являются гипотезы турбулентной вязкости (Буссинеск), пути перемешивания (Прандтль) и самоподобия стационарных турбулентных течений (Карман) [47]. Исходя из них, был выведен универсальный логарифмический профиль скорости, являющийся ближайшей асимптотикой для большинства стационарных плоских турбулентных потоков. Применительно к течению в трубах перечисленные гипотезы привели к универсальному закону сопротивления и формуле для дефекта скорости, охватывающего практически весь экспериментально доступный интервал изменения числа Рейнольдса [48].

Эмпирические модели, использующие понятие турбулентной вязкости, можно классифицировать следующим образом [13]:

- 1 алгебраические модели
- 2 модели с одним дифференциальным уравнением переноса характеристик турбулентности (однопараметрические модели)
- 3 модели с двумя дифференциальными уравнениями переноса характеристик турбулентности (двухпараметрические модели)
- 4 модели с большим числом уравнений.

Алгебраические модели связывают турбулентную вязкость μ_T с градиентом поля скоростей. Они ведут свое начало от работ Л. Прандтля [8], который ввел понятие длины пути перемешивания l , что позволило записать турбулентную вязкость для простых сдвиговых течений в виде $\mu_T = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$. Эта формула позволила решать ряд задач теории турбулентных течений, важных для инженерных приложений. Однако эту формулу невозможно распространить на трехмерный случай. Также к недостаткам алгебраических моделей следует отнести их ограниченную область применения, т.е. привязкой к конкретному типу течения, предположение гипотезы пути перемешивания о состоянии локального равновесия турбулентности, т.е. о соблюдении баланса между генерацией турбулентной энергии и ее диссипацией в каждой точке расчетной сетки. Также, в соответствии с данной теорией при достижении скоростью локального максимума, турбулентные напряжения исчезают, что, вообще говоря, не верно. Учет подобных фактов для подобных моделей приводит к их усложнению, что лишает их своей привлекательности. В настоящее время данные модели применяются в основном для расчета течений в непосредственной близости от стенки [4]. Попытки устранения недостатков алгебраических моделей привели к созданию моделей, содержащих одно балансовое дифференциальное уравнение переноса турбулентности, которое выводится либо для турбулентной вязкости, либо для кинетической энергии турбулентности [14].

Модели турбулентности, содержащие два дифференциальных уравнения переноса, берут свое начало в работах А. Н. Колмогорова [15], они позволяют рассчитывать двумерные и трехмерные течения и в настоящее время являются наиболее распространенными. Для данного класса моделей предполагается решение дифференциальных уравнений переноса для двух характеристик турбулентности, которые позволяют определить турбулентную вязкость посредством алгебраических соотношений. Среди моделей, содержащих два дифференциальных уравнения переноса, в настоящее время наиболее распространены модели $k - \varepsilon$ и $k - \omega$, а также их различные модификации [43]. В этих моделях в качестве первой характеристики турбулентности используется величина кинетической энергии турбулентных пульсаций k . В $k - \varepsilon$ модели второй характеристикой является диссипация энергии турбулентности ε , а в $k - \omega$ — удельная скорость

диссипации, $\omega \sim \frac{\varepsilon}{k}$.

В зависимости от модели, для вихревой вязкости справедливы зависимости: $k - \varepsilon - \nu_T \sim \frac{k^2}{\varepsilon}, k - \omega - \nu_T \sim \frac{k}{\omega}$

В частности, в моделях группы $k - \varepsilon$ турбулентная вязкость выражается как

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

где C_μ - эмпирическая константа; k - кинетическая энергия турбулентности; ε - диссипация энергии турбулентности.

Для расчета величин k и ε используются соответствующие уравнения переноса, которые можно получить трансформацией векторного уравнения Навье-Стокса

1.3 Турбулентность в ANSYS

Прежде чем перейти к рассмотрению задачи о турбулентном течении в рамках представленной В. А. Павловским f - модели, рассмотрим еще один важный вопрос: возможность численного решения задач, связанных с турбулентными течениями жидкостей, при помощи имеющихся на сегодняшний день пакетов прикладного программного обеспечения. Лидером в этой области является линейка продуктов корпорации ANSYS Inc.

ANSYS является универсальным и наиболее распространенным пакетом программного обеспечения, основывающимся на методе конечно - элементного (МКЭ) анализа. С момента его появления около 30 лет назад, он успешно развивающаяся и в настоящее время. ANSYS широко используется специалистами в сфере автоматизированных инженерных расчетов (Computer-Aided Engineering , CAE) и конечно - элементного решения практически всех типов пространственных задач механики деформируемого твёрдого тела и механики конструкций, задач механики жидкости и газа, теплопередачи и теплообмена, электродинамики, акустики, а также механики связанных полей. Моделирование и анализ, как альтернатива дорогостоящим и порой трудноосуществимым экспериментам типа «проектирование — изготовление — испытания» делает его по-настоящему незаменимым инструментом во многих производственных сферах. ANSYS предоставляет наиболее широкий спектр современных физических моде-

лей. Также имеется возможность проводить мультидисциплинарные расчеты в рамках интегрирующей среды ANSYS Workbench.

ANSYS DesignModeler - программный модуль, разработанный для создания и подготовки расчетной модели. Он прост в использовании, построен на полностью параметрической среде; присутствует возможность прямой двусторонней связи с ведущими CAD пакетами.

ANSYS CFD располагает наиболее полным набором моделей турбулентности, среди которых широко используемые $k - \varepsilon$, $k - \omega$ и модель Рейнольдсовых напряжений (RSM) для сильно закрученных или анизотропных течений. Благодаря наблюдаемой в последнее время тенденции увеличения производительности и снижения стоимости ЭВМ [16], модели крупных вихрей (LES) и более экономичные модели неприсоединенного вихря (DES) становятся все более популярны при решении производственных задач. Новые модели позволяющие рассчитывать ламинарно-турбулентный переход и современная модель (SAS), автоматически определяющая масштаб турбулентных вихрей, обычно применяются в случаях, когда точности стационарных моделей турбулентности недостаточно. Различные пристеночные функции и метод enhanced wall treatment (EWT) позволяют максимально точно описать потоки, ограниченные стенками.

ANSYS CFX

Программный комплекс, сочетающий возможности анализа гидрогазодинамических процессов, многофазных потоков, химической кинетики, горения и многих других. CFX обеспечивает принципиально новый уровень решения задач вычислительной гидрогазодинамики за счет уникального сочетания технологий, начиная от прямого интерфейса к большинству CAD систем и заканчивая возможностью проводить сопряженный жидкостно-структурный анализ совместно с ANSYS Multiphysics. Широкий выбор моделей турбулентности, в сочетании с линейным решателем с технологией "Algebraic Coupled Multigrid" позволяет добиться высокой точности результатов при решении различного класса задач. CFX имеет возможность параллельного счета на любых параллельных вычислительных системах [46] (с распределенной (SMPD) и общей (SIMD) памятью) под различными ОС (включая Windows, LINUX, UNIX). CFX обладает

хорошей масштабируемостью (до 64 процессоров).

FLUENT

FLUENT - программный комплекс, предназначенный для решения задач механики жидкостей и газов. С 2006 года FLUENT входит в состав ANSYS.

FLUENT использует неструктурированную сеточную технологию (типы элементов - гексаэдры, тетраэдры, призмы и пирамиды). Адаптация расчетной сетки позволяет получить точное решение для областей с большими градиентами потока. Это наиболее важно при пограничных слоях. Возможности использовать модели динамической адаптивной сетки позволяют проводить такие расчеты, как: потоки в цилиндрах, клапаны и другие. Во FLUENT включены ламинарные и турбулентные модели гидродинамики, теплопередачи, фазовых переходов и радиации, а также модели для расчета кавитации, сжимаемых жидкостей, теплообмена, теплопроводности, реальных газов, и модуль для расчета влажного пара.

FLUENT включает в себя множество моделей турбулентности: несколько версий модели $k - \varepsilon$, модели $k - \omega$, Reynolds stress модель (RSM), LES и DES.

Постпроцессор FLUENT обладает возможностью отображать результаты расчета в векторном и контурном видах, а так же отображать траектории движения частиц. Также имеется возможность анимирования результатов расчетов. FLUENT позволяет выполнять параллельные вычисления на Windows, Linux, и Unix платформах. При этом могут быть использованы многопроцессорные машины или кластеры. FLUENT обладает клиент-серверной архитектурой и довольно хорошей масштабируемостью.

1.4 f — модель турбулентности

Как было отмечено ранее, модель течения жидкости, которую можно было бы применить в расчетах, не задаваясь вопросом о режиме течения, востребована во многих исследовательских областях.

Гипотеза длины пути перемешивания Л. Прандтля на полуэмпирическом уровне описывает пристенные турбулентные течения и тем самым

удовлетворяет потребностям инженерных расчетах таких течений. «Теория приводит к логарифмическим профилям осредненных скоростей, хорошо согласующимися с экспериментальными данными за счет надлежащего выбора двух констант. Следует заметить, что она не применима в непосредственной близости к стенке, поскольку краевое условие прилипания в рамках её невыполнимо. Поэтому для придания формуле Л. Прандтля физического смысла приходится вводить понятие вязкого подслоя. В настоящее время используются двух- и трехслойные модели течения, позволяющие сопрягать зону потока с чисто молекулярным трением с областью развитого турбулентного течения, где трение имеет молярную природу, и профиль скорости является логарифмическим. Естественно, что при использовании таких многослойных моделей число эмпирических констант увеличивается» [17].

Можно пойти иным путем и построить чисто феноменологическую теорию, альтернативную гипотезе длины пути перемешивания Прандтля, которая также приводит к логарифмическим профилям осредненных скоростей, обеспечивает краевое условие прилипания и содержит всего лишь две феноменологические константы.

Такая теория, а именно, дифференциальная модель течения несжимаемой вязкой жидкости чисто феноменологического характера — f — модель, являющаяся альтернативой теории длины пути перемешивания, предложена в работе [17] В. А. Павловским. В ней содержится безразмерная скалярная величина — весовая функция f , принимающая значения на интервале от нуля до единицы и уравнение переноса этой величины [18]. Данная функция является отношением турбулентной вязкости к суммарной. Модель особенна тем, что дает предельные переходы: результаты решения совпадают с данными для ламинарного режима при малых числах Рейнольдса и для турбулентного при больших. Также при больших значениях Re решения дают логарифмические профили скоростей и логарифмические законы сопротивления, характерные для турбулентного режима течения. Неоспоримое преимущество данной модели в том, что она позволяет производить расчеты течений не задумываясь, какой при этом режим течения реализуется — ответ на этот вопрос дают результаты расчета. Система уравнений f — модели позволяет задать градиент трения вблизи стенки, обеспечивая

тем самым выполнение условия прилипания.

В следующих главах рассмотрена f — модель и на ее основе построено решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе.

2 Ламинарное течение в круглой трубе

2.1 Течение Пуазейля в трубе

Будем рассматривать прямую круглую трубу с постоянным по всей длине диаметром. Скорость течения на стенках трубы вследствие прилипания равна нулю, в середине трубы она имеет наибольшее значение. В точках цилиндрических поверхностей с осями, совпадающим с осью трубы, скорость течения постоянна.[19] Отдельные концентрические слои скользят один по другому так, что скорость везде имеет осевое направление. Движение такого вида называется ламинарным течением. На достаточно большом расстоянии от входа в трубу распределение скоростей течения вдоль радиуса не зависит от координаты в продольном направлении.

Движение жидкости в трубе происходит под действием перепада давления в направлении оси трубы, но в каждом поперечном сечении, перпендикулярном к оси трубы, давление можно рассматривать как постоянное [2]. Движение каждого элемента жидкости ускоряется вследствие перепада давления и замедляется вследствие напряжения сдвига, вызванного трением. Другие силы на жидкость не действуют.

Рассмотрим цилиндр длиной l и радиусом y внутри жидкости, ось которого совпадает с осью трубы. В направлении этой оси на него действуют силы давления $p_1\pi y^2$ и $p_2\pi y^2$, приложенные к входному и выходному основаниям цилиндра соответственно, а также касательная сила $2\pi y l \tau$, действующая на боковую поверхность цилиндра. Приравнивая разность сил давления $(p_1 - p_2)\pi y^2$ касательной силе, получаем в качестве условия равновесия в направлении движения уравнение:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{y}{2} \quad (1)$$

В рассматриваемом случае скорость u уменьшается с увеличением координаты y и равна нулю при $y = R$. Поэтому на основании закона трения $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ следует принять, что $\tau = -\mu \frac{du}{dy}$. Подставляя в (1), получим:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_1 - p_2}{\mu l} \frac{y}{2}.$$

Интегрируя с начальным условием $u(y) = 0$ при $y = R$, получаем:

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(R^2 - y^2). \quad (2)$$

Т.о. имеем параболическое распределение скоростей по радиусу трубы. Наибольшее значение скорость имеет в середине трубы, где она равна

$$u_m = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}R^2.$$

Полное количество Q жидкости, протекающее сквозь сечение трубы (расход жидкости) определяется как объем параболоида вращения и следовательно,

$$Q = \frac{\pi}{2}R^2 u_m = \frac{\pi R^4}{8\mu l}(p_1 - p_2). \quad (3)$$

Введя среднюю скорость течения через поперечное сечение трубы, равную

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2},$$

запишем (3) в виде:

$$p_1 - p_2 = 8\mu \frac{l}{R^2} \bar{u}. \quad (4)$$

Закон, выражаемый формулой (2) - закон Пуазейля ламинарного течения в трубе. Такое течение может наблюдаться только в трубах со сравнительно малым диаметром и при сравнительно небольших скоростях. С возрастанием скорости или при увеличении диаметра трубы характер течения в корне меняется: перепад давления уже не зависит линейно от скорости течения в соответствии с формулой (4). Кроме того, скорость течения распределяется по поперечному сечению трубы значительно равномернее и вместо упорядоченного слоистого течения происходит течение, в котором на продольную скорость налагаются беспорядочные поперечные составляющие, вызывающие сильное перемешивание жидкости в поперечном направлении. Иными словами, жидкость переходит в турбулентный режим течения.

2.2 Течение в начальном участке круглой трубы

Во входном поперечном сечении профиль скоростей имеет прямоугольную форму, но затем под воздействием трения он постепенно вытягивается и, наконец, на некотором расстоянии от входа в трубу, принимает форму параболы. Л. Шиллер нашел приближенное теоретическое значение длины начального участка. Однако измерения И. Никурадзе показали, что на протяжении первой трети начального участка развитие профиля скоростей хорошо совпадает с расчетом Шиллера, но дальше переход измеренного профиля в параболический профиль Пуазейля переходит медленнее. Приближенным решением этой задачи занимались и другие ученые.

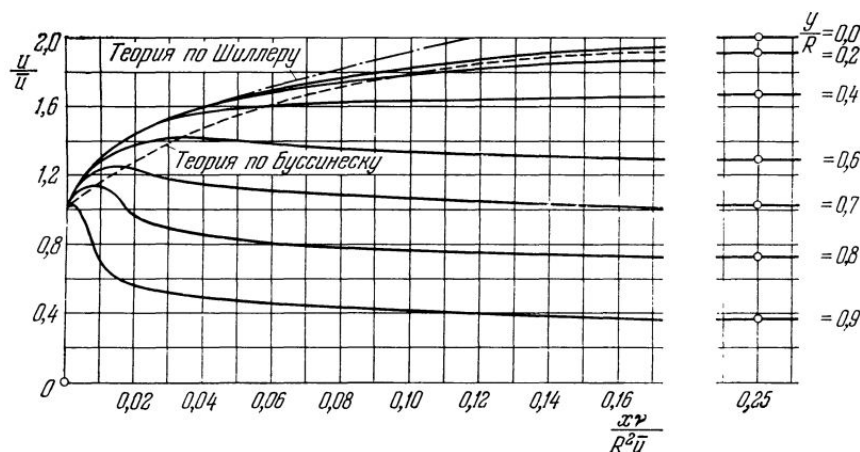


Рис. 1: Распределение скоростей в начальном участке круглой трубы при ламинарном течении.

По Толботу при числе Рейнольдса $Re = 10^3$ течение становится устойчивым на расстоянии около сорока диаметров трубы от входного сечения, что хорошо совпадает с результатами эксперимента [2].

2.3 Закон сопротивления для течения в трубах

Для ламинарного течения связь между перепадом давления и количеством протекающей жидкости $Q = \pi R^2 \bar{u}$ определяется чисто теоретически и при этом хорошо совпадает с опытом. Для турбулентного режима подобную зависимость можно установить только экспериментально, т. к. чисто теоретический расчет турбулентных течений в настоящее время невозможен. [22] Связь между перепадом давления и расходом устанавливается

законом сопротивления для движения в трубе. В литературе выведено множество формул, определяющих сопротивление в трубе, причем более ранние из них выведены без учета закона подобия Рейнольдса и зависят от выбора единиц. В настоящее время таким формулам придают безразмерный вид, вводя безразмерный коэффициент сопротивления ξ , определяемый соотношением

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\xi}{d} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2, \quad (5)$$

где $d = 2R$ - диаметр трубы.

Согласно [2], наибольшее касательное напряжение имеет место у стенки трубы, где оно равно

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{R}{2}, \quad (6)$$

причем эта формула верна независимо от режима течения. Т.о., касательное напряжение на стенке может быть определено экспериментально, путем измерения перепада давления.

Сравнивая равенства (5) и (6), получаем формулу

$$\tau_0 = \frac{\xi}{8} \rho \bar{u}^2. \quad (7)$$

В 1911 г. Блаузиус получил эмпирическую формулу для коэффициента сопротивления в гладких трубах

$$\xi = 0,3164 \left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}},$$

известную как закон сопротивления Блаузиуса.

В этой формуле $\bar{u}d/\nu = Re$ - число Рейнольдса. Согласно этой формуле, безразмерный коэффициент сопротивления есть функция только числа Рейнольдса. Закон Блаузиуса применим только для $Re \leq 10^5$. Отсюда видно, что в данном диапазоне чисел Рейнольдса перепад давления пропорционален $\bar{u}^{7/4}$.

И. Никурадзе произвел измерения сопротивления и распределения скоростей для широкой области чисел Рейнольдса: $4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 3,2 \cdot 10^6$.

С увеличением числа Рейнольдса профили становятся все более пол-

ными (Рис.2).

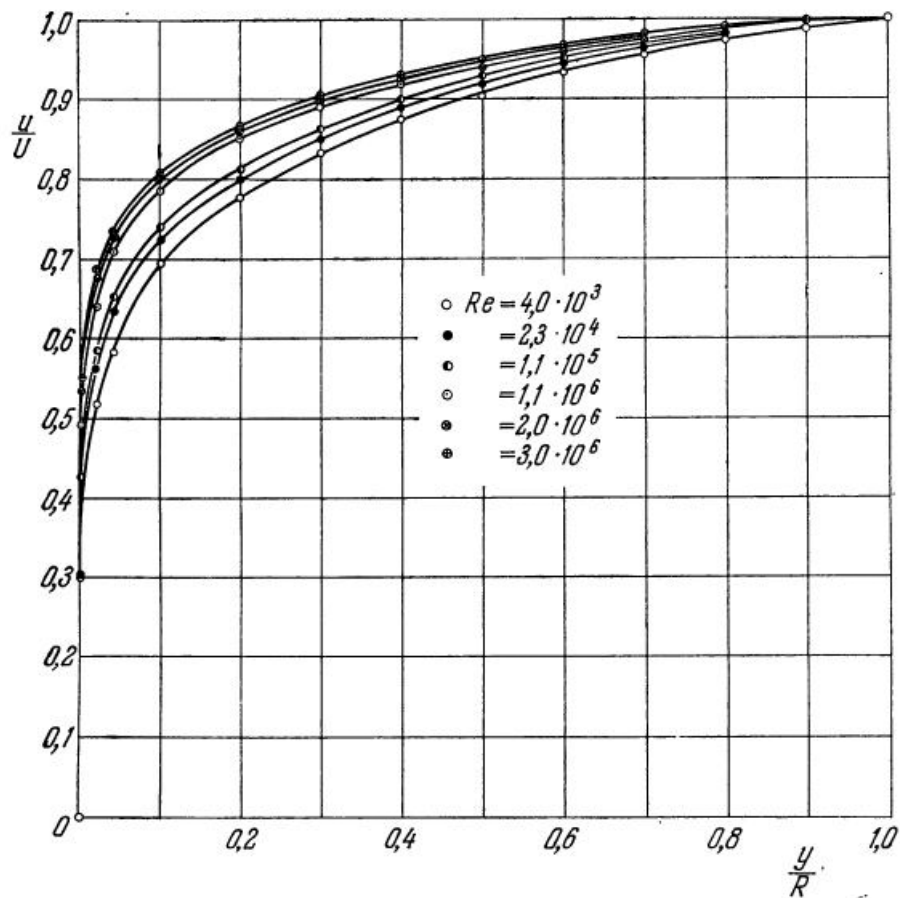


Рис. 2: Распределение скоростей в гладкой трубе при различных Re по Никурадзе. На оси ординат отложены безразмерные скорости u/U , а на оси абсцисс - безразмерные расстояния y/R

Уравнения профиля скоростей можно записать в виде:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n}, \quad (8)$$

где U - максимальная скорость. В этом соотношении показатель степени $1/n$ слабо зависит от Re . Это наводит на предположение, что существуют асимптотические законы, содержащие логарифм как предельное значение очень малой степени. В сокращенной записи такой закон распределения скоростей имеет вид:

$$\phi = A \ln \eta + D, \quad (9)$$

где

$$A = \frac{1}{\chi}, \quad D = -\frac{1}{\chi} \ln \beta$$

свободные постоянные. При сравнении этого закона с экспериментальными

данными Никурадзе, находим: $A = 2,5; D = 5,5$. Следовательно, $\chi = 0,4; \beta = 0,111$. Таким образом, закон распределения скоростей в гладких трубах при очень больших числах Рейольдса имеет вид

$$\phi = 2,5 \ln \eta + 5,5, \quad (10)$$

или

$$\phi = 5,75 \lg \eta + 5,5.$$

Из гипотезы пути перемешивания Прандтля в совокупности с гипотезой $l = \chi y$ и гипотезы подобия Кармана, получаем [2] универсальный закон распределения скоростей

$$\frac{U - u}{v_*} = f\left(\frac{y}{R}\right)$$

Явное выражение для функции $f\left(\frac{y}{R}\right)$ можно получить, воспользовавшись (10):

$$\frac{U - u}{v_*} = 2,5 \ln \frac{R}{y}. \quad (11)$$

Логарифмический закон скоростей (17) допускает экстраполирование на произвольно большие числа Рейнольдса. Будем полагать, что этим же свойством обладает и подлежащий выводу закон сопротивления. Выполним вывод, следуя изложению Прандтля [26].

Имея распределение скоростей (11), вычислим среднюю скорость по поперечному сечению:

$$\bar{u} = U - 3,75v_*. \quad (12)$$

Результаты экспериментов, выполненных Никурадзе, дают вместо 3,75 другое число, а именно

$$\bar{u} = U - 4,07v_*.$$

Из формулы (7) имеем

$$\xi = 8 \left(\frac{v_*}{\bar{u}} \right)^2. \quad (13)$$

Далее, из универсального закона распределения скоростей (10) сле-

дует, что

$$U = v_* \left(2,5 \ln \frac{Rv_*}{\nu} + 5,5 \right).$$

Подставляя в (12), получим

$$\bar{u} = v_* \left(2,5 \ln \frac{Rv_*}{\nu} + 1,75 \right). \quad (14)$$

Величину Rv_*/ν , входящую в последнее равенство, можно представить как произведение числа Рейнольдса $\bar{u}d/\nu$ на выражение, зависящее от ξ :

$$\frac{Rv_*}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\bar{u}d}{\nu} \frac{v_*}{\bar{u}} = \frac{\bar{u}d}{\nu} \frac{\sqrt{\xi}}{4\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Выразив теперь v_* через ξ посредством соотношения (13) и подставляя в (14), получим закон сопротивления

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2,035 \lg \left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \sqrt{\xi} \right) - 0,91.$$

Отложив значения $1/\sqrt{\xi}$ как ординаты на абсциссах $\lg(Re\sqrt{\xi})$, получим графическое изображение закона сопротивления для гладких труб в виде прямой.

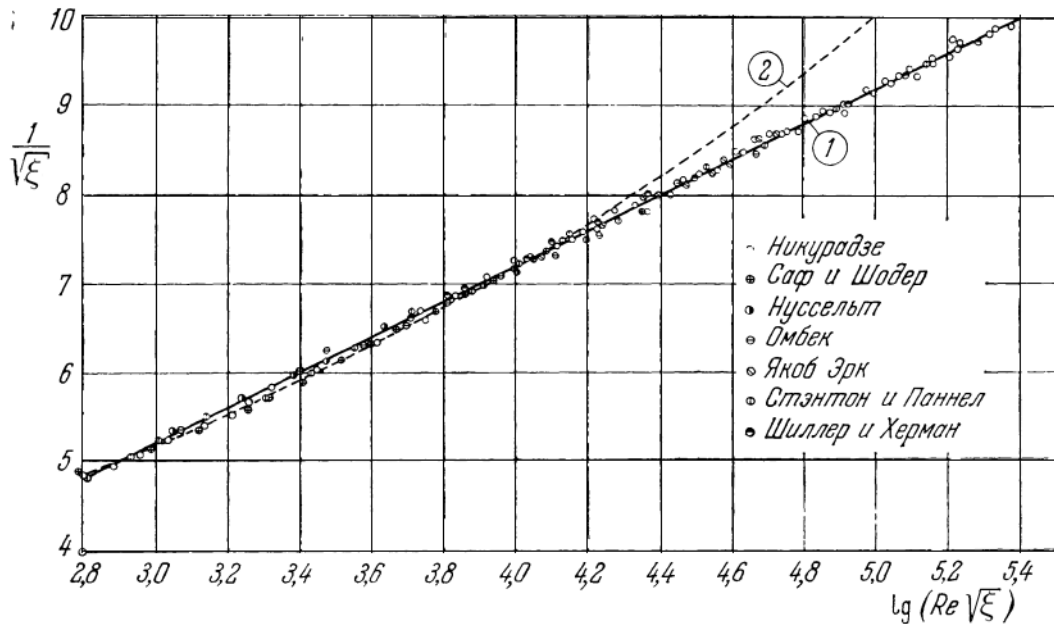


Рис. 3: Универсальный закон распределения для гладкой трубы. Кривая(1) соответствует закону Прандтля, (2) - закону Блаузиуса.

Как показывает рис.3, этот результат блестяще подтверждается измерениями: все экспериментальные значения укладываются на прямую 1 с численными коэффициентами, лишь немного отличающимися от теоретических значений. Эта прямая имеет уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2,01 \lg \left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \sqrt{\xi} \right) - 0,8.$$

Закон, выражаемый этим уравнением, называется универсальным законом сопротивления Прандтля для гладких труб. Он проверен И. Никурадзе [21] вплоть до $Re = 3,4 \cdot 10^6$ и дает хорошее совпадение с измерениями. В соответствие с условиями вывода, этот закон может быть экстраполирован до произвольно больших чисел Рейнольдса.

3 Феноменологическая f – модель турбулентности

3.1 Физический смысл функции f

Будем рассматривать дифференциальную феноменологическую модель течения вязкой несжимаемой жидкости - f -модель, в определенном смысле альтернативную теории длины пути перемешивания. В ней содержится безразмерная скалярная величина - некоторая весовая функция $f \in (0, 1)$ и уравнение переноса этой величины. Эта функция представляет собой отношение турбулентной вязкости к суммарной, включающей в себя и молекулярную вязкость.

В турбулентном режиме молекулярная вязкость мало влияет на касательные напряжения. Тензор Рейнольдсовых напряжений можно выразить через тензор суммарных напряжений σ_Σ , который включает в себя как турбулентные, так и чисто вязкостные напряжения.

Согласно f - модели, тензор Рейнольдсовых напряжений имеет вид:

$$R = f\sigma_\Sigma,$$

где f - некоторая безразмерная величина, равная нулю на стенке и близкая к единице в области развитого турбулентного течения.

Смысл величины f легче всего продемонстрировать на примере простого сдвигового течения, когда имеется лишь одна компонента скорости — продольная, которая зависит только от поперечной координаты. Для такого течения:

$$f = \frac{\tau_T}{\tau_\Sigma},$$

причем

$$\tau_\Sigma = \tau_L + \tau_T,$$

где $\tau_\Sigma, \tau_L, \tau_T$ - соответственно, суммарное, вязкостное и турбулентное касательные напряжения.

Как функция от перемещения и критерия Рейнольдса, $f(y, Re)$ обладает следующими свойствами:

при $Re \rightarrow 0, f \rightarrow 0$, при $Re \rightarrow \infty, f \rightarrow 1$.

Так, под функцией f можно понимать скалярную безразмерную меру режима течения потока в рассматриваемой точке.

В случае простого сдвигового течения:

$$\tau_L = \mu \frac{du}{dy} - \text{вязкое напряжение для сдвиговых течений (Ньютон)},$$

$$\tau_T = \mu_T \frac{du}{dy} \text{ турбулентное напряжение (Буссинеск)},$$

где μ_T - турбулентная вязкость.

Здесь и далее, под скоростью u будем понимать осредненное по Рейнольдсу значение скорости. При ламинарном режиме осредненное и мгновенные значения скорости совпадают.

Имеем:

$$f = \frac{\mu_T}{\mu + \mu_T},$$

откуда видно, что f показывает соотношение молекулярной и турбулентной долей вязкости в потоке. Отсюда турбулентная вязкость:

$$\mu_T = \mu \frac{f}{1 - f}$$

и в результате, после подстановки, получаем формулу для суммарного напряжения

$$\tau_\Sigma = \frac{\mu}{1 - f} \frac{du}{dy}. \quad (16)$$

На рис.4 представлен характерный вид функции f по сечению канала: на стенке она равна нулю, а на оси достигает максимальное значение.

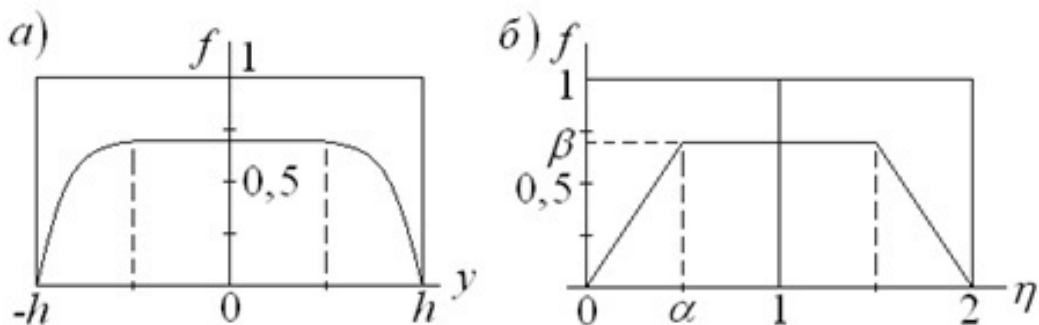


Рис. 4: Поведение функции f по сечению канала.
 а) характерный вид; б) простейшая аппроксимация

Далее рассмотрим установившееся турбулентное течение несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале шириной $2h$. В проекции на продольную координату, уравнение движения сплошной среды в напряжениях примет вид:

$$-\frac{dp}{dx} + \frac{d\tau_{\Sigma}}{dy} = 0,$$

или

$$-\frac{dp}{dx} + \frac{d\tau_L}{dy} + \frac{d\tau_T}{dy} = 0.$$

Учитывая для τ_L закон вязкого трения Ньютона, имеем:

$$-\frac{dp}{dx} + \rho\nu\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d\tau_T}{dy}.$$

Здесь ρ — плотность, p — давление, ν — кинематическая вязкость, u — осредненная продольная скорость, $\tau_L = -\rho\overline{u'v'}$ — чисто турбулентное касательное напряжение, x и y — соответственно, продольная и поперечная координаты, причем далее координату y будем отсчитывать от стенки.

Интегрирование этого уравнения дает:

$$-\frac{dp}{dx}(y - h) + \rho\nu\frac{du}{dy} + \tau_T = 0,$$

или, если ввести динамическую скорость

$$v_* = \sqrt{|\tau_w|/\rho} = \sqrt{\left|\frac{dp}{dx}\right| \frac{h}{\rho}},$$

этот интеграл примет вид:

$$\nu\frac{du}{dy} = v_*^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{\tau_T}{\rho}.$$

Так как для данного течения $\tau_{\Sigma} = \rho v_*^2(1 - y/h)$, то, учитывая $f = \tau_T/\tau_{\Sigma}$, запишем это выражение в безразмерном виде:

$$\frac{dv}{d\eta} = Re_*(1 - \eta)(1 - f), \quad (17)$$

где $\eta = y/h$, Re_* — число Рейнольдса, вычисленное по динамической

скорости:

$$Re_* = v_* \frac{h}{\nu}, v = \frac{u}{v_*}.$$

Далее надо определить f так, чтобы она наилучшим образом описывала экспериментальные данные, в частности, скоростей и сопротивлений. Прежде всего можно аппроксимировать f простейшим образом, в виде кусочно-линейной функции так, как это показано на рис. 5б и тем самым построить самый простой вариант теории. Задаваясь значениями α и β можно рассчитать профиль и сопротивление. Эти значения подбираются так, чтобы обеспечивалось наилучшее согласование с опытными данными. Очевидно, они зависят от Re_* . Анализ показывает, что для $Re_* = 10^2$ величины $\alpha \approx 0,95, \beta \approx 0,80$; для $Re_* = 10^3$ $\alpha \approx 0,70, \beta \approx 0,999$, для $Re_* = 10^4$ $\alpha \approx 0,49, \beta \approx 0,9999$, т.е. β быстро стремится к единице.

Для того, чтобы такое отличие было заметным, от величины f полезно перейти к безразмерной турбулентной вязкости $\nu_t^v = \nu_t / (v_* \cdot h)$. Связь f и ν_t^v определяется формулой:

$$\nu_t^v = \frac{f}{Re_* \cdot (1 - f)}, f = \frac{Re_* \cdot \nu_t^v}{1 + Re_* \cdot \nu_t^v} \quad (18)$$

В настоящее время накоплено достаточно достоверных данных относительно величины ν_t^v . Схематично они изображены на графике рис.5а [22].

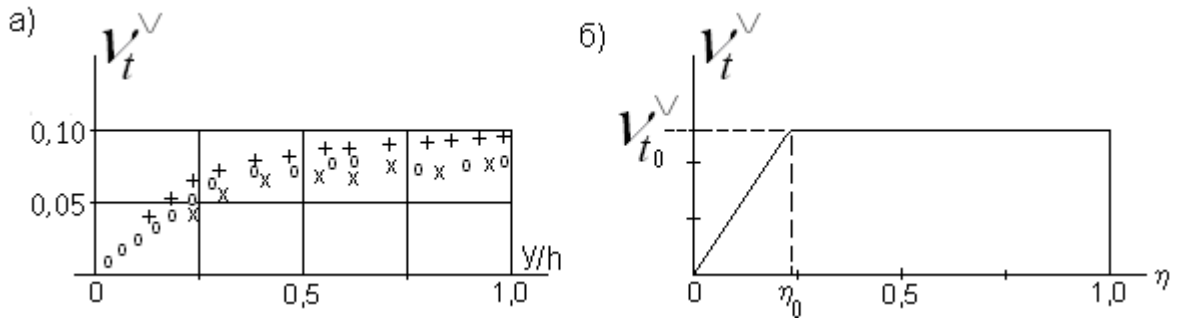


Рис. 5: Поведение безразмерной турбулентной вязкости по сечению потока: а) – данные опытов, б) – простейшая аппроксимация.

Её можно аппроксимировать в виде кусочно-линейной функции, представленной на рис.5б следующим образом:

$$\nu_t^v = \begin{cases} \nu_{t_0}^v \eta / \eta_0, & \eta \leq \eta_0 \\ \nu_{t_0}^v, & \eta_0 \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

Тогда, учитывая соотношение (18), формулу (17) можно записать в виде

$$\frac{dv}{d\eta} = \frac{Re_* \cdot (1 - \eta)}{1 + Re_* \cdot \nu_t^v} \quad (20)$$

Интегрирование этого уравнения с учётом (19) даёт для пристенной области, где $\eta \leq \eta_0$:

$$v = \frac{\eta_0}{\nu_{t_0}^v} \ln \left(1 + Re_* \nu_{t_0}^v \frac{\eta}{\eta_0} \right) + \frac{1}{Re_*} \left(\frac{\eta_0}{\nu_{t_0}^v} \right)^2 \left[\ln \left(1 + Re_* \nu_{t_0}^v \frac{\eta}{\eta_0} \right) - Re_* \nu_{t_0}^v \frac{\eta}{\eta_0} \right] \quad (21)$$

а для зоны, где $\eta_0 \leq \eta \leq 1$:

$$v = v(\eta_0) + \frac{Re_*}{1 + Re_* \nu_{t_0}^v} \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} - \eta_0 + \frac{\eta_0^2}{2} \right) \quad (22)$$

Если положить $\nu_{t_0}^v = const = 0,08$, что неплохо согласуется с данными [16], то величина η_0 будет функцией числа Рейнольдса Re_* . Анализ обработки экспериментальных данных даёт следующую эмпирическую формулу для η_0 , справедливую для турбулентного режима течения (примерно для $\eta_0 > 10^2$):

$$\eta_0 = 0,25 + 16/[lg(1 + Re_*)]^4 \quad (23)$$

По сопротивлению этот вариант с $\nu_{t_0}^v = 0,08$ и η_0 по формуле (23) приводит к удовлетворительному согласованию с опытом, но профили скоростей вблизи стенки оказываются недостаточно полными. Поэтому с целью устранения этого недостатка, а также для обеспечения предельного перехода к ламинарному режиму течения величину $\nu_{t_0}^v$ также следует считать функцией от Re_* . В результате обработки опытных данных можно получить следующие эмпирические формулы:

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= 1 - \frac{0,71Re_*^4 - 250Re_*^3 + 8,6 \cdot 10^7 \cdot Re_*^2}{(3100 + Re_*)^{4,018}} \\ \nu_{t_0}^v &= \frac{0,117Re_*^4 + 515Re_*^3 + 9,5 \cdot 10^4 \cdot Re_*^2}{(3100 + Re_*)^{4,018}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

На графике рис.6 показаны профили скоростей, вычисленные по формулам (21)-(24) на фоне известного логарифмического закона Л. Прандтля.

Соответствующий закон сопротивления приведён на рис.1.4 (число Рейнольдса здесь $Re_* = u_{cp}h/\nu$) на фоне асимптотик согласно [34].

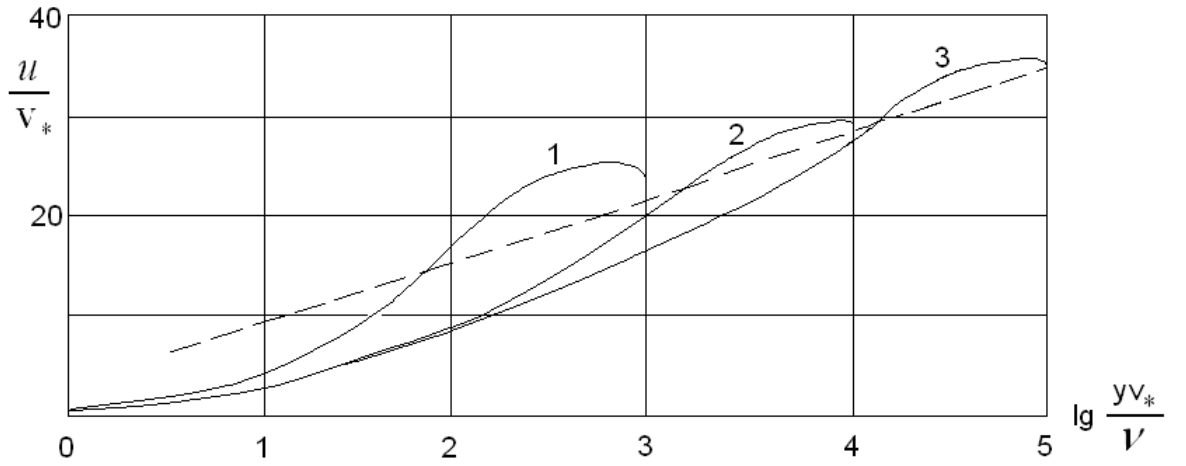


Рис. 6: Профили скоростей в универсальных координатах для различных Re_* : 1 - $Re_* = 10^3$; 2 - $Re_* = 10^4$; 3 - $Re_* = 10^5$; пунктир соответствует закону $u/v_* = 2,5 \ln(yv_*/\nu) + 5,5$.

Изложенная «скелетная» теория приводит к логарифмическому профилю в зоне развитого турбулентного течения. При этом она даёт возможность описания течения во всём диапазоне чисел Рейнольдса, т.е. она охватывает как ламинарный, так и турбулентный режимы течения. Переходная зона между ними с помощью формул (24) не описывается.

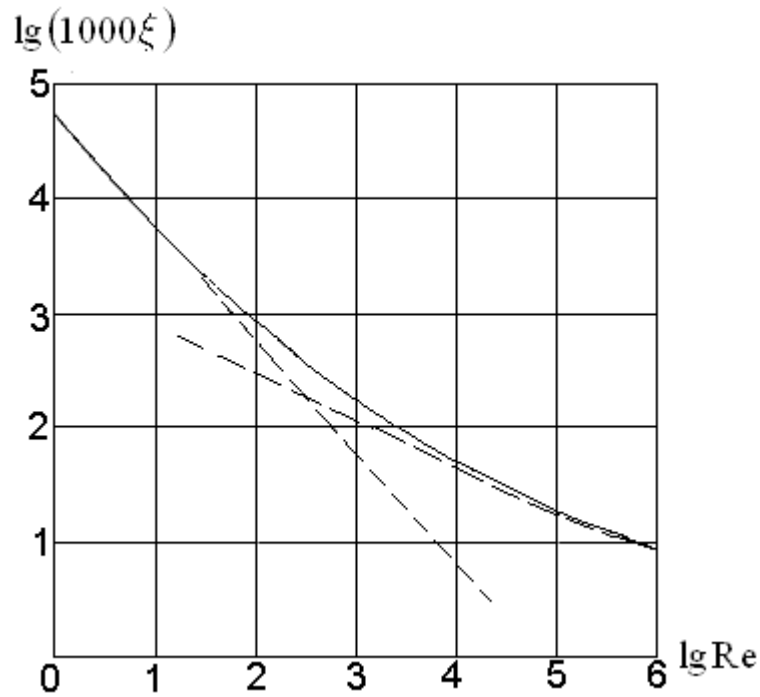


Рис. 7: Закон сопротивления в плоском канале; сплошная линия – расчёт, штриховые соответствуют ламинарному режиму и закону Блазиусовского типа.

Анализ «скелетной» феноменологической модели показывает, что даже сравнительно грубое, кусочно-линейное представление функции f (или связанной с ней турбулентной вязкостью ν_t^v) позволяет получать логарифмические профили и законы сопротивления, почти удовлетворительно согласующиеся с экспериментом. При этом, в отличие от длины пути перемешивания Л. Прандтля выполняется условие прилипания и, кроме того, нет необходимости полагать постоянным касательное напряжение по сечению потока.

Более тонкий вариант изложенной теории с использованием меры турбулентности f можно получить, если эту величину представить не двумя, а тремя и более участками. В пределе можно получить непрерывную кривую для функции f , которая подчиняется дифференциальному уравнению второго порядка.[31,32] При этом к тому же возникает возможность записать уравнение движения жидкости в виде, справедливом и для ламинарного, и для турбулентного режима течения.

3.2 Система уравнений модели

Выражение для касательного напряжения (16), которое включает в себя вязкие и турбулентные напряжения можно, как и формулу Ньютона, обобщить на трёхмерный случай. Тогда тензор напряжений $\underline{\tau}$ будет линейно связан с тензором скоростей деформаций (осреднённых, если поток турбулентен):

$$\underline{\tau} = \frac{2\mu}{1-f} \underline{S} \quad (25)$$

где

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right)^T \right) \quad (26)$$

Если подставить реологическое соотношение (25) в уравнение движения сплошной среды в напряжениях

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \underline{\tau}$$

то получаем уравнение движения жидкости [29,31]:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \frac{\mu}{(1-f)} \Delta \vec{v} + \frac{\mu}{(1-f)^2} \underline{d} \cdot \vec{\nabla} f \quad (27)$$

В скалярном виде, в декартовой системе координат имеем три скалярных уравнения

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{1-f} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \\ & + \frac{\mu}{(1-f)^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (28)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$.

Видно, что уравнение (27) представляет собой модификацию уравнения Навье-Стокса. При $f = 0$, при чисто ламинарном режиме, это уравнение переходит в уравнение Навье-Стокса.

Для замыкания системы уравнений, содержащей уравнение движения (27) и уравнение неразрывности, необходимо ещё одно скалярное урав-

нение – уравнение для функции f , которая образует некоторое поле $f(\vec{r}, t)$. Такое уравнение предложено в работе [24] – уравнение переноса величины f :

$$\rho \frac{df}{dt} = \mu \Delta f + \frac{\mu \psi(f)}{1-f} \vec{\nabla} f \vec{\nabla} f + \rho(1-f) \frac{(\vec{\nabla} p \times \vec{\nabla} f) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})}{\sqrt{2|\underline{S} : \underline{S}|} \sqrt{2|\underline{\Omega} : \underline{\Omega}|}} \quad (29)$$

Здесь \underline{S} – тензор скоростей деформаций, определяемый выражением (26), $\underline{\Omega}$ – антисимметричная часть тензора градиентов деформаций

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^T \right)$$

Двоеточие в выражении (29) обозначает двойное скалярное произведение тензоров, величина $\psi(f)$ - алгебраическая функция f :

$$\psi(f) = \frac{2\alpha + \beta(1-f)}{\alpha + \beta(1-f)} \quad (30)$$

Величины α и β – две феноменологические константы:

$$\alpha = 2, 5; \quad \beta = 8, 5, \quad (31)$$

которые найдены из обработки опытных данных для широкого класса пристенных турбулентных течений.

Видно, что уравнение (29) напоминает уравнение Бюргерса. Анализ его структуры показывает, что величина f изменяется в пределах $0 \leq f < 1$, что и следовало ожидать.

Система уравнений, состоящая из уравнения движения (27), уравнения неразрывности $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ и уравнения (29) содержит три неизвестные – скорость \vec{v} , давление p и величину f , которая заключена в пределах $0 \leq f < 1$ согласно определению и структуре уравнения (29). Эта система является замкнутой и позволяет решать задачи об изотермических течениях несжимаемой вязкой жидкости независимо от режима течения. [33] Граничными условиями для этой системы уравнений будут условия прилипания и вязкого ньютоновского трения на твёрдой границе S с нормалью \vec{n} , а также равенство нулю функции f на этой границе и условие на производную модуля скорости по этой функции:

$$\vec{v}|_S = 0, \quad |2\underline{S} \cdot \vec{n}|_S = \frac{v_*^2}{\nu}, \quad f|_S = 0, \quad \left| \frac{d\vec{v}}{df} \right|_S = (\alpha + \beta)v_*. \quad (32)$$

В этих условиях v_* – динамическая скорость, которая выражается через касательное напряжение на стенке τ_w :

$$v_* = \frac{|\tau_w|}{\rho} \quad (33)$$

Структура реологического соотношения (25) показывает, что тензоры $\underline{\tau}$ и \underline{S} соосны, но связь между ними нелинейна при $f > 0$ (при $f = 0$, т.е. в ламинарном режиме, эта связь линейна). [25] Тем самым соотношение (25) может описывать и турбулентные течения, если пренебрегать анизотропией и памятью турбулентного потока. Если же такие упрощения недопустимы, что вполне может быть для потоков, в которых несоосность тензоров $\underline{\tau}$ и \underline{S} существенна, то реологическое соотношение (25) нужно обобщать на этот случай.

Однако для большинства турбулентных течений при их расчёте достаточно ограничиваться лишь учётом нелинейности, что подтверждается успешным применением теории длины пути перемешивания Л. Прандтля.

В дальнейшем для описания течений вязкой несжимаемой жидкости будем использовать следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla} p + \frac{\mu}{(1-f)} \Delta \vec{v} + \frac{\mu}{(1-f)^2} \underline{S} \cdot \vec{\nabla} f \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \rho \frac{df}{dt} &= \mu \Delta f + \frac{\mu \psi(f)}{1-f} \vec{\nabla} f \vec{\nabla} f + \rho(1-f) \frac{(\vec{\nabla} p \times \vec{\nabla} f) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})}{\sqrt{2|\underline{S} : \underline{S}|} \sqrt{2|\underline{\Omega} : \underline{\Omega}|}} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Здесь \vec{v} – скорость; $f = f(\vec{r})$ – безразмерная скалярная величина, мера турбулентности, $0 \leq f < 1$; μ – динамическая вязкость, p – давление; \underline{d} и \underline{w} – тензор скоростей деформаций и спин, соответственно, характеризующие симметричную и антисимметричную части тензора градиентов скоростей $\vec{\nabla} \vec{v}$ ($\underline{d} + \underline{w} = \vec{\nabla} \vec{v}$); две точки обозначают двойное скалярное произведение тензоров; $\Psi(f)$ – скалярная функция от f :

$$\psi(f) = \frac{2\alpha + \beta(1 - f)}{\alpha + \beta(1 - f)}$$

где α и β – феноменологические константы; $\alpha = 2.5$, $\beta = 8.5$.

Все величины в этих уравнениях понимаются как осредненные по Рейнольдсу (в ламинарном режиме, очевидно, осредненные и мгновенные значения величин совпадают). Краевые условия для этой системы уравнений – условия прилипания и вязкого ньютоновского трения на твердой границе S с нормалью \vec{n} , а также равенство нулю функции f на этой стенке и условие на производную модуля скорости по этой функции:

$$\vec{v}|_S = \vec{V}_{TB}, \quad |2\vec{d} \cdot \vec{n}|_S = \frac{v_*^2}{\nu}, \quad f|_S = 0, \quad \left| \frac{d\vec{v}}{df} \right|_S = (\alpha + \beta)v_*. \quad (35)$$

В этих выражениях ν – кинематическая вязкость, \vec{V}_{TB} – скорость твёрдой границы, v_* – динамическая скорость, связанная с трением на стенке τ_w , $v_* = \sqrt{|\tau_w|/\rho}$, ρ – плотность жидкости.

3.3 Определение феноменологических констант

В любой феноменологической теории константы находятся из условия согласования решения задачи и данных опыта. Как известно, эталонной задачей для поиска значений этих констант является задача об установившемся течении жидкости в круглой цилиндрической трубе. Для этого течения имеются обширные экспериментальные данные, позволяющие найти достоверные значения феноменологических констант. После нахождения таких значений теория обычно проверяется путём решения других задач очередного сравнения с опытом. В необходимых случаях происходит корректировка теории. Такой путь построения теории характерен для всех феноменологических подходов [6].

Рассмотрим задачу о течении в трубе радиуса R . Здесь удобно ввести в рассмотрение безразмерную координату η , отсчитываемую от стенки трубы:

$$\eta = \frac{R - r}{R}, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (36)$$

где r – радиальная координата (отсчитывается от оси). Кроме того удобно ввести и безразмерную скорость $v = u/v_*$, где v_* – динамическая скорость, связанная с касательным напряжением на стенке $\tau_w, \rho v_*^2 = |\tau_w|$. Опираясь с этими безразмерными величинами, можно компактно записывать решения задач как для ламинарного, так и для турбулентного режима течения [34]. После нахождения профиля скорости в виде

$$v = v(\eta)$$

можно найти среднюю скорость

$$\frac{u_{cp}}{v_*} = v_{cp} = 2 \int_0^1 v(1 - \eta) d\eta$$

и далее коэффициент сопротивления

$$\lambda = \frac{8}{v_{cp}^2},$$

который будет выражаться через число Рейнольдса по динамической скорости

$$Re_* = \frac{v_* R}{\nu}$$

С обычным числом Рейнольдса

$$Re = \frac{2Ru_{cp}}{\nu}$$

оно связано зависимостью

$$Re = 2Re_* v_{cp}$$

Интересно заметить, что из последнего выражения следует $v_{cp} = Re/(2Re_*)$, что позволяет коэффициент сопротивления записать в виде

$$\lambda = 32 \frac{Re_*}{Re}$$

Это соотношение справедливо для любого режима течения, разница для этих режимов будет в связи между Re_* и Re , что определяется реологией.

В ламинарном режиме течения закон вязкого трения Ньютона

$$\tau = \nu \frac{du}{dr}$$

и закон распределения касательных напряжений

$$\tau = \tau_w \frac{r}{R} = -\rho v_*^2 \frac{r}{R}$$

приводят к уравнению

$$\mu \frac{du}{dr} = -\rho v_*^2 \frac{r}{R}$$

После введения безразмерных величин η и v его можно записать в виде:

$$\frac{dv}{d\eta} = Re_*(1 - \eta)$$

После интегрирования, с учётом условия прилипания $\eta = 0, v = 0$ можно записать выражение для безразмерного профиля скоростей (течение Пуазейля):

$$v = Re_*(\eta - \eta^2/2) \quad (37)$$

Средняя по сечению скорость

$$v_{cp} = 2 \int_0^1 Re_* \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) (1 - \eta) d\eta = \frac{Re_*}{4}$$

Число Рейнольдса

$$Re = 2Re_* v_{cp} = 2Re_* \frac{Re_*}{4} = \frac{Re_*^2}{2}$$

Коэффициент сопротивления

$$\xi = \frac{8}{v_{cp}^2} = \frac{128}{Re_*^2} = \frac{64}{Re} \quad (38)$$

Аналогичные выкладки можно сделать для любой модели течения. В случае единой феноменологической ламинарно-турбулентной модели решение задачи [34] приводит к профилю скорости, неявно зависящему от

координаты η

$$v = \beta f - \alpha \ln(1 - f) \quad (39)$$

где функция f определяется из трансцендентного уравнения

$$Re_* (\eta - \eta^2/2) = \frac{\alpha f}{(1 - f)} - \beta \ln(1 - f) \quad (40)$$

При малых числах Рейнольдса это решение сводится к обычному течению Пуазейля. После вычисления можно построить профиль в универсальных координатах, $(y_+, \frac{u}{v_*})$ где $y_+ = \frac{yv_+}{\nu} = Re_* \eta$, а также найти v_{cp} и далее число Re и коэффициент сопротивления λ .

Далее полученное решение необходимо сравнить с экспериментальными данными. Для турбулентного режима течения в трубе, для течения при больших числах Рейнольдса такими экспериментальными данными являются данные Никурадзе [27]. Они приводят в части сопротивления к закону сопротивления Прандтля-Никурадзе:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2 \lg \left(Re \sqrt{\xi} \right) - 0,8$$

или, что практически то же самое: $\lambda = 0,0032 + 0,221/Re^{0,237}$.

В части профиля скоростей они дают для логарифмической зоны (достаточно удалённой от стенки) закон

$$v = 5,75 \lg y_+ + 5,5$$

Условие прилипания для этого профиля не выполняется, что приводит к необходимости вводить в рассмотрение зону вязкого подслоя.

Однако можно предложить, на основе анализа экспериментальных данных Никурадзе, следующую эмпирическую однослойную формулу для турбулентного профиля скоростей, для которой выполняется условие прилипания:

$$v = 1,25 \ln (1 + Re_*^2 \eta^2) + \arctg(Re_* \eta) + \frac{Re_*^2 \eta^2}{1 + Re_*^2 \eta^2} (3,93 + 5,5 \eta^2 - 4,5 \eta^3) \quad (41)$$

Эта формула справедлива для $Re_* > 300$, т.е. для $Re \geq 10^4$. В таблице 1 приведены расчётные профили скоростей согласно формулы для двух чисел Рейнольдса, для которых имеются опытные данные Никурадзе.

Таблица 1

η	$Re = 2,3 \cdot 10^4$ v/v_{max}	$Re = 3 \cdot 10^6$ v/v_{max}
0	0	0
0,1	0,702	0,8
0,2	0,785	0,855
0,3	0,838	0,891
0,4	0,88	0,919
0,5	0,914	0,942
0,6	0,943	0,962
0,7	0,966	0,978
0,8	0,984	0,989
0,9	0,995	0,997
1	1	1

На графике рис. 8 показаны эти расчётные профили на фоне опытных точек Никурадзе [36].

Видно, что формула (41) хорошо аппроксимирует профили скоростей. В таблице 1.2 показаны результаты расчётов течений на основе эмпирической формулы (41) [30,35]. Для фиксированных значений числа Рейнольдса, вычисляемого по динамической скорости, приведены соответствующие значения обычного числа Рейнольдса Re и коэффициента сопротивления.

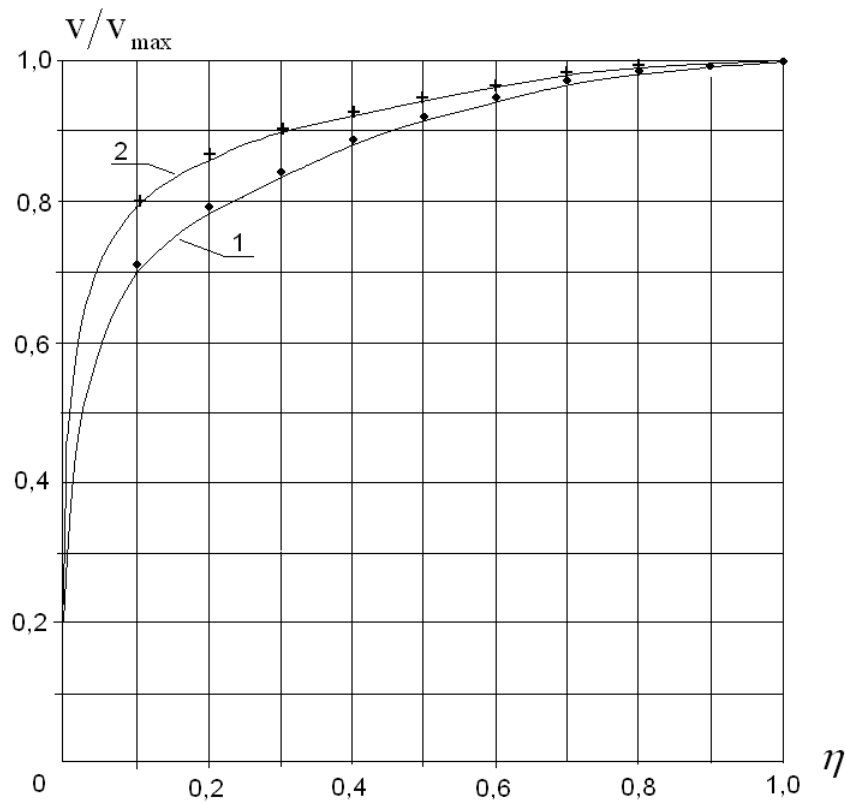


Рис. 8: Профили скоростей для чисел Рейнольдса: 1 - $Re = 2,3 \cdot 10^4$, расчёт, согласно (41) 2 - $Re = 3 \cdot 10^6$, расчёт; точки – экспериментальные данные Никурадзе [21].

Таблица 2

Re_*	Re	$lg Re$	ξ	$lg(1000\xi)$
628,5	$2,3 \cdot 10^4$	4,361	0,0238	1,378
1000	$3,89 \cdot 10^4$	4,590	0,0211	1,324
2523,7	$1,1 \cdot 10^5$	5,041	0,0168	1,226
10^4	$5,04 \cdot 10^5$	5,703	0,0125	1,098
51150	$3,0 \cdot 10^6$	6,790	0,0083	0,920
10^5	$6,2 \cdot 10^6$	6,790	0,083	0,920
10^6	$7,35 \cdot 10^7$	7,866	0,0059	0,772

На графике рис. 9 показан закон сопротивления (сплошная линия) на фоне формулы Блазиуса (пунктирная линия):

$$\xi = 0,3164/Re^{1/4} \quad (42)$$

Любопытно заметить, что эта формула может быть аппроксимирована выражением $\xi = 0,1 \cdot lg(100/Re)^{1/4}$. Сплошная линия, соответствующая рас-

чѣту по (41) практически точно следует формуле Прандтля-Никурадзе (3.3). Погрешность составляет не более 4%.

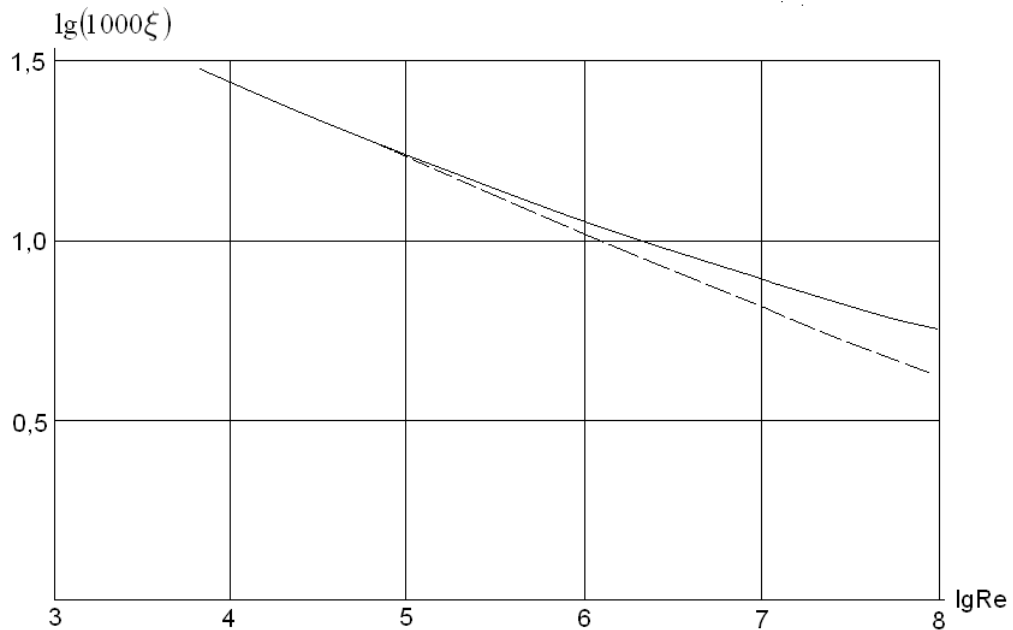


Рис. 9: Закон сопротивления, соответствующий формуле (41); пунктирная линия соответствует формуле Блазиуса (42).

Видно, что кривая сопротивления практически точно следует формуле Прандтля-Никурадзе.

Кроме аппроксимационной формулы (41) для турбулентных профилей скоростей, обобщающей экспериментальные данные и приводящие к закону сопротивления Прандтля-Никурадзе, можно предложить и другую, также хорошо аппроксимирующие опыты:

$$v = 1,25 \ln(1 + 81 Re_*^2 \eta^2) + \frac{1}{9} \arctg(9 Re_* \eta) + \frac{Re_*^2 \eta^2}{1 + Re_*^2 \eta^2} (3,93 + 5,5 \eta^2 - 4,5 \eta^3) \quad (43)$$

Результаты расчѣтов по этой формуле приведены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

η	$Re = 2,3 \cdot 10^4$ v/v_{max}	$Re = 3 \cdot 10^6$ v/v_{max}
0	0	0
0,1	0,704	0,801
0,2	0,785	0,855
0,3	0,836	0,889
0,4	0,875	0,915
0,5	0,907	0,934
0,6	0,934	0,956
0,7	0,957	0,971
0,8	0,976	0,984
0,9	0,990	0,993
1,0	1,0	1,0

Таблица 4

Re_*	Re	$\lg Re$	ξ	$\lg(1000\xi)$
628,65	$2,3 \cdot 10^4$	4,361	0,0236	1,374
10^3	$3,91 \cdot 10^4$	4,592	0,0209	1,320
10^4	$5,06 \cdot 10^5$	5,704	0,0125	1,096
51045	$3,0 \cdot 10^6$	6,477	0,00926	0,967
10^5	$6,21 \cdot 10^6$	6,793	0,00829	0,918
10^6	$5,9 \cdot 10^7$	7,867	0,00590	0,770

Соответствующие профили скоростей и закон сопротивления показаны на рис. 8 и 9. Видно, что и формула (43) хорошо аппроксимирует опытные данные для турбулентного режима течения. Однако она, в отличие от (41), более тщательно описывает ещё и зону течения вблизи оси.

Опираясь на формулу (37) и аппроксимационные формулы (41) и (43) была реализована итерационная процедура для поиска значений η и ξ , фигурирующих в выражении (39). Она привела к следующим значениям феноменологических констант

$$\alpha = 2,5 \quad \beta = 8,5$$

Эти значения будут использованы далее при решении задач на основе единой феноменологической ламинарно-турбулентной теории.

4 Расчет течения жидкости в круглой цилиндрической трубе на основе f – модели

4.1 Постановка задачи о течении в трубе

Итак, подходим к вопросу о стабилизированном изотермическом течении жидкости с постоянными физическими свойствами в цилиндрической круглой трубе.

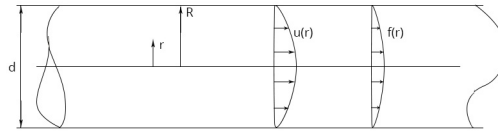


Рис. 10: Модель течения в круглой цилиндрической трубе.

Согласно f -модели:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \frac{\mu}{1-f} \Delta v + \frac{\mu}{(1-f)^2} \mathbf{S} \cdot \nabla f, \quad (44)$$

$$\rho \frac{df}{dt} = \mu \Delta f + \mu \frac{\psi(f)}{1-f} \nabla f \cdot \nabla f + \rho(1-f) \frac{(\nabla p \times \nabla f) \cdot (\nabla \times v)}{\sqrt{2|S:S|} \sqrt{2|\Omega:\Omega|}}. \quad (45)$$

В уравнении движения и уравнении переноса скалярной (безразмерной) функции f , $0 \leq f < 1$ величины:

$$\psi(f) = \frac{2\alpha + \beta(1-f)}{\alpha + \beta(1-f)}, \quad \alpha = 2, 5; \quad \beta = 8, 5;$$

$\rho, \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ - плотность; $p, [Pa]$ - давление;

$\mu, [Pa \cdot s]$ - динамическая вязкость;

$\bar{v}, \left[\frac{m}{s} \right]$ - вектор скорости;

$\underline{\Omega} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \bar{v} - (\bar{\nabla} \bar{v})^T)$ - тензор вращения;

$\frac{d}{dt}$ - оператор материальной производной, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \bar{\nabla})$;

\bar{f} - вектор интенсивности массовых сил, $\bar{\nabla}$ - вектор Гамильтона (набла).

Уравнение неразрывности:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0. \quad (46)$$

Задачу будем решать в цилиндрической системе координат (r, φ, z) [29]. Для стабилизированного течения вектор скорости $\bar{v} = \bar{v}(v_r, v_\varphi, v_z)$

имеет лишь одну компоненту - осевую v_z , которая зависит лишь от одной координаты - радиальной. Обозначим эту компоненту v_z как $u = u(r)$. Скалярная величина f также зависит радиальной координаты, $f = f(r)$. Уравнение движения (44), пренебрегая массовой силой, принимает вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{1-f} r \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

Для стабилизированного течения $p = p(z)$, $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = \text{const}$, и тогда можно перейти к обыкновенным производным:

$$-\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{1-f} r \frac{du}{dr} \right) = 0. \quad (47)$$

Уравнение (45) переноса функции f принимает вид:

$$\mu \frac{q}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \mu \frac{\psi}{1-f} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - (1-f) \frac{\frac{dp}{dz} \frac{df}{dr}}{\frac{du}{dr}} = 0. \quad (48)$$

Уравнение неразрывности (46) тождественно удовлетворяется:

$$0 \equiv 0.$$

Запишем уравнения в безразмерном виде, вводя следующие безразмерные переменные:

- безразмерную радиальную координату, отсчитываемую от стенки трубы.

$$\eta = 1 - \frac{r}{R}; \quad dr = -R d\eta.$$

На стенке, при $r = R$ величина $\eta = 0$, а на оси, при $r = 0$, $\eta = 1$. Тем самым, $0 \leq \eta \leq 1$.

- безразмерную скорость

$$v = \frac{u}{v_*},$$

где v_* - динамическая скорость:

$$v_* = \sqrt{\frac{1}{2} \left| \frac{dp}{dz} \right| \frac{R}{\rho}},$$

или

$$\frac{dp}{dz} = \frac{2}{R} \rho v_*^2.$$

После введения этих переменных уравнения системы запишутся в виде:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\frac{(1-\eta)}{(1-f)} \frac{dv}{d\eta} \right] = -2Re_*(1-\eta), \quad (49)$$

$$\frac{dv}{d\eta} \frac{1}{(1-\eta)} \frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta) \frac{df}{d\eta} \right] + \frac{dv}{d\eta} \frac{\psi(f)}{(1-f)} \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 + 2Re_*(1-f) \frac{df}{d\eta} = 0. \quad (50)$$

Здесь $Re_* = \frac{v_* R}{\nu}$, ν - кинематическая вязкость. Безразмерный комплекс Re связан с числом Рейнольдса $Re = \frac{u_{cp} d}{\nu}$:

$$Re = \frac{u_{cp} \cdot 2R}{\nu} = \frac{v_* R}{\nu} \cdot \frac{2u_{cp}}{v_*} = Re_* \cdot 2v_{cp},$$

где v_{cp} - безразмерная средняя скорость по сечению трубы,

$$v_{cp} = 2 \int_0^1 (1-\eta) v d\eta.$$

Граничные условия уравнений (49),(50):

$$\eta = 0 : \quad v = 0, \quad \frac{dv}{d\eta} = Re_*, \quad f = 0, \quad \frac{df}{d\eta} = \frac{Re_*}{\alpha + \beta}. \quad (51)$$

Система (49),(50) с граничными условиями (51) решается следующим образом: задается значение Re_* (10, 100, 1000, 10000), решается задача и находятся профили скоростей $v(\eta)$ и, кроме этого, $f(\eta)$. Вычисляем v_{cp} и далее Re . Кроме этого, находим коэффициент сопротивления по формуле:

$$\xi = \frac{8}{v_{cp}^2}$$

4.2 Численный расчет и сравнение результатов

Рассмотрим результаты решения задачи посредством f – модели при разных значениях Re_* , соответствующих ламинарному и турбулентному режимам. На рис.11-12 представлены профили безразмерной скорости и меры турбулентности f .

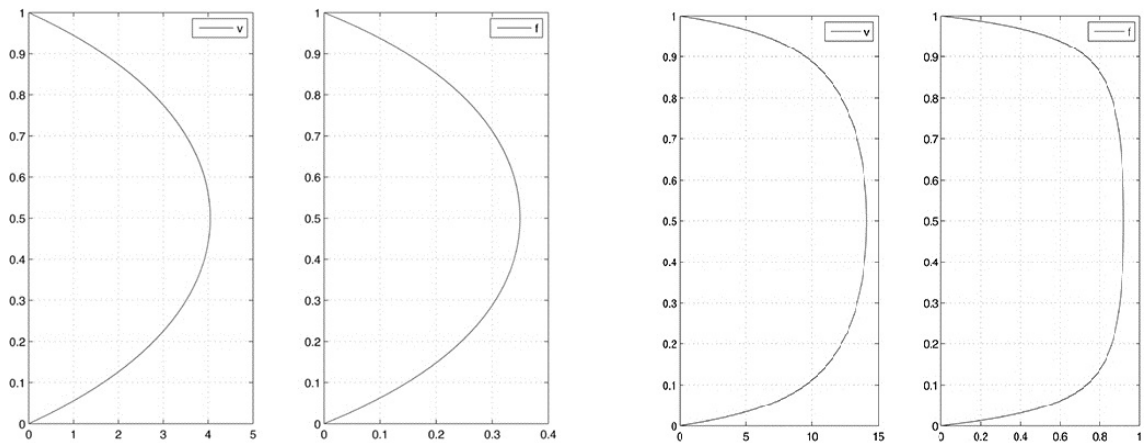


Рис. 11: а. $Re_* = 10^1$; б. $Re_* = 10^2$.

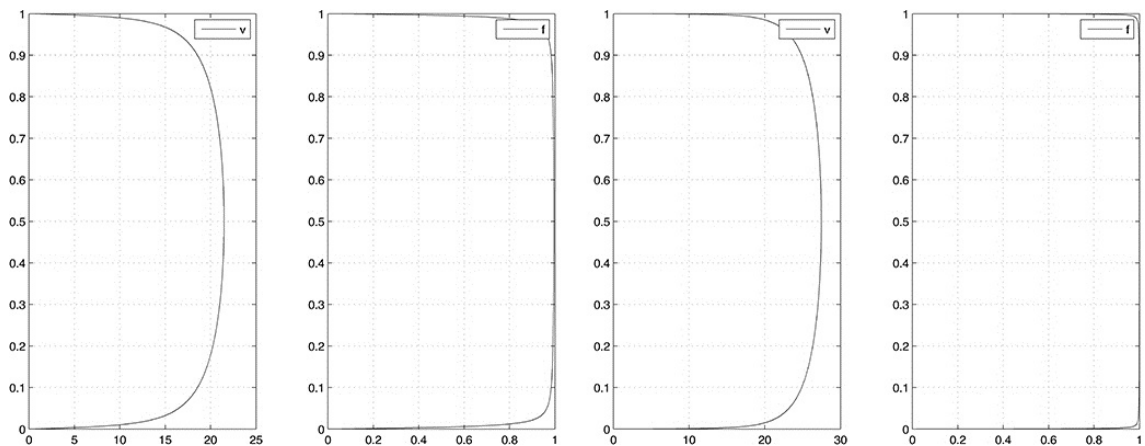


Рис. 12: а. $Re_* = 10^3$; б. $Re_* = 10^4$.

Из графиков видно, что с ростом числа Рейнольдса профили скорости увеличивают полноту. Это наглядно проиллюстрировано на рис.13:

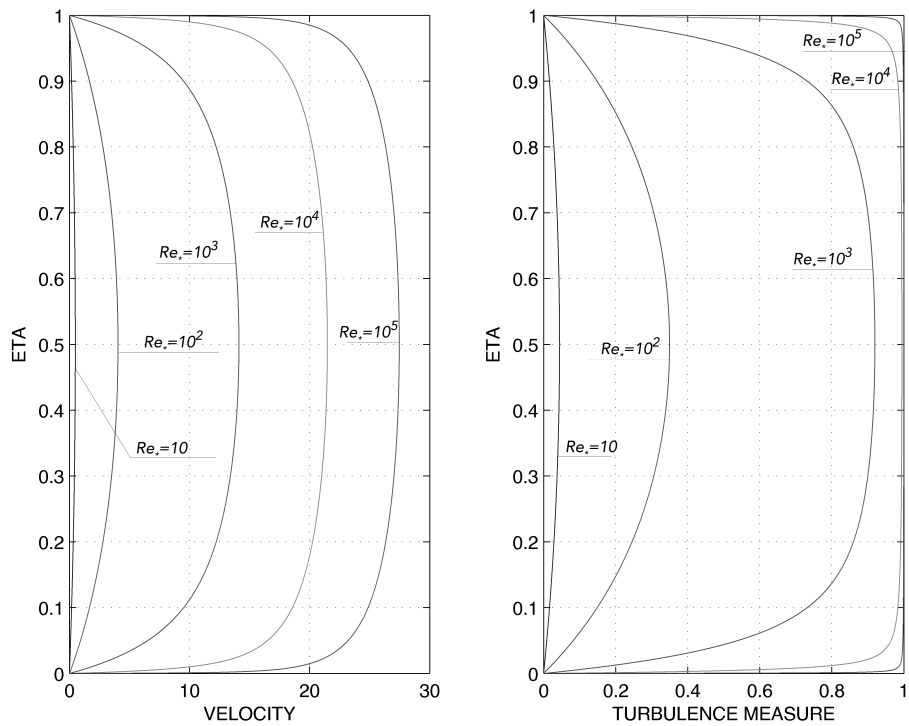


Рис. 13: Профили скорости (а) и меры турбулентности (б) для чисел Рейнольдса.

На рис.14 показан универсальный закон распределения скоростей для ламинарного и турбулентного режима течений в гладкой трубе. Результаты расчетов согласно f — модели сопоставляются с экспериментальными данными.

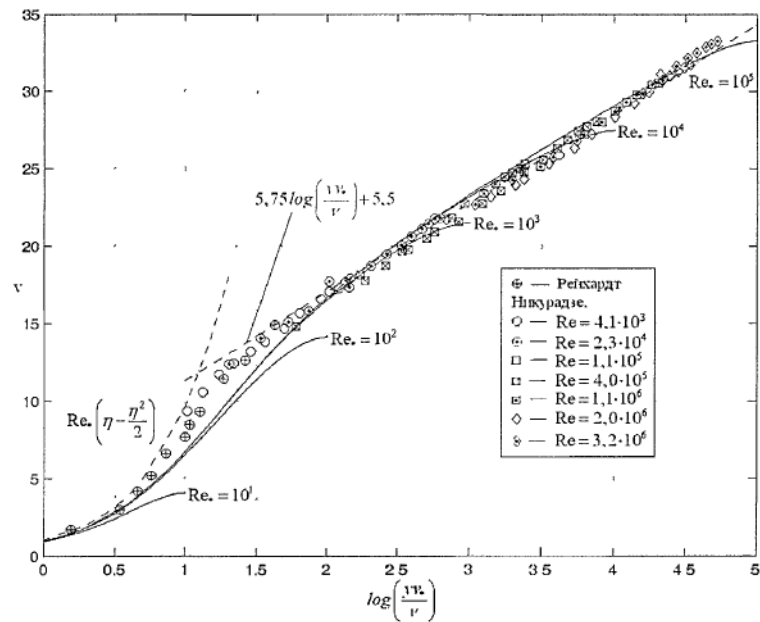


Рис. 14: Универсальный закон распределения скоростей для гладкой трубы. Сплошная линия - расчет, маркерами нанесены данные [2].

Приведенные на графике выше данные позволяют сделать вывод о хорошем согласовании расчетов с опытными данными.

Для буферной зоны результаты расчета и экспериментальные данные Лауфера [23] показаны на рис.15.

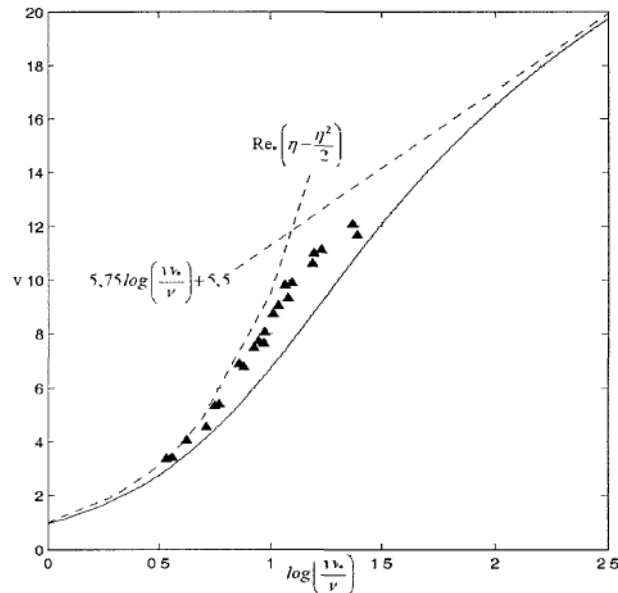


Рис. 15: Буферная зона. Сплошная линия - расчет, пунктир - асимптотики, маркеры - экспериментальные данные [23].

Результаты расчета коэффициента сопротивлений проиллюстрированы на рис.16. В качестве асимптотик используются законы сопротивления для ламинарного режима, закон Блаузиуса для турбулентного и закон Прандтля-Никурадзе для гладких труб.

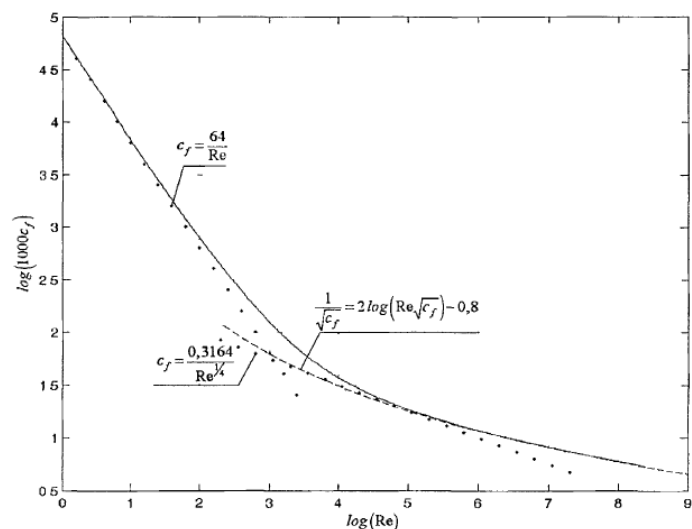


Рис. 16: Закон сопротивления для гладкой трубы.

На рисунке видно, что кривая сопротивления из ламинарного участка переходит на участок, довольно точно соответствующий закону Прандтля-Никурадзе.

На основании этих фактов можно говорить о хорошей согласованности расчетных данных с аналитическими, и, следовательно, о возможности использования f - модели для решения задач о турбулентных течениях жидкости.

4.3 Верификация на основе ламинарного течения

Для верификации выкладок выполним расчет при $f = 0$, то есть для ламинарного режима течения. Вместо системы (49), (50) будет

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta) \frac{dv}{d\eta} \right] = -2Re_*(1 - \eta). \quad (52)$$

Неизвестная $v(\eta)$ находится из решения уравнения с граничными условиями:

$$\eta = 0 : \quad v = 0;$$

Задается значение Re_* , после нахождения профиля $v(\eta)$ вычисляем v_{cp} и далее находим коэффициент сопротивления.

Итак, сначала интегрируем (52). Первый интеграл:

$$(1 - \eta) \frac{dv}{d\eta} = -2Re_* \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + C_1.$$

Из условия $\eta = 1$, $\frac{dv}{d\eta} = 0$ находим $C_1 = Re_*$. Отсюда имеем:

$$\frac{dv}{d\eta} = Re_*(1 - \eta).$$

Интегрируем второй раз:

$$v = Re_* \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + C_2.$$

Из условия $\eta = 0$, $v = 0$ находим $C_2 = 0$.

В итоге безразмерный профиль скоростей равен

$$v = Re_* \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right),$$

Средняя по сечению трубы скорость равна

$$v_{cp} = 2 \int_0^1 (1 - \eta) v(\eta) d\eta = 2 \int_0^1 (1 - \eta) Re_* \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) d\eta = \frac{Re_*}{4}.$$

Отсюда получаем соотношение: $\frac{v}{v_{cp}} = 2(2\eta - \eta^2)$.

Коэффициент сопротивления равен $\xi = \frac{8}{v_{cp}^2} = \frac{128}{Re_*^2}$, откуда имеем:
 $\xi = \frac{64}{Re}$, что и следовало ожидать.

4.4 Интегрирование задачи в рамках f – модели

f – модель позволяет получать для простых сдвиговых течений решения в квадратурах.

Общая схема решения:

1. задается значение Re_*
2. вычисляются профили скоростей $v(\eta)$ и величина v_*/U_0
3. Находится Re и затем ξ

При построении численной процедуры системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающие движение жидкости, сводились к системам уравнений первого порядка [44,45].

Обозначим $y_1 = v$; $y_2 = v'$; $y_3 = f$; $y_4 = f'$. В итоге, решаемая система уравнений и краевые условия принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\eta} = y_2, \\ \frac{dy_3}{d\eta} = y_4, \\ \frac{dy_2}{d\eta} \frac{1}{1-y_3} + \frac{y_2 y_4}{(1-y_3)^2} = -Re_*, \\ \frac{dy_4}{d\eta} + \psi(y_3) + \frac{y_4^2}{1-y_3} + Re_* \frac{y_4}{y_2} (1 - y_3) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta = 0 : & y_1 = 0; y_2 = Re_*; y_3 = 0; y_4 = \frac{Re_*}{\alpha + \beta}; \\ \eta = 1 : & y_1 = 1; y_2 = -Re_*; y_3 = 0; y_4 = -\frac{Re_*}{\alpha + \beta}. \end{cases}$$

Общая схема численного интегрирования, согласно [28], такова:

1. Задается значение Re_*
2. Задается начальное значение пристрелочного параметра v_*/U_0
3. С заданой точностью в точке η_0 стыкуются решения задач Коши «вперед» и «назад»
4. По полученному решению вычисляются значения Re , R_p и ξ

Методы, задействованные при решении:

1. метод пристрелки (для решения краевой задачи)
2. метод Рунге-Кутты 4го порядка (для решения задачи Коши)
3. метод Ньютона (решение систем нелинейных уравнений)
4. метод Симпсона (вычисление определенного интеграла)

Верификация вычислительной процедуры была реализована посредством сравнения численных решений задачи с решениями в квадратурах, определенных при одинаковом шаге по η . В результате было установлено, что результаты решений, полученные этими двумя методами, хорошо согласуются.

Заключение

1. Для описания течений жидкости при произвольных числах Рейнольдса можно использовать феноменологическую f — модель течения, которая позволяет выполнить расчеты, не задумываясь о том, какой режим течения реализуется в конкретном рассматриваемом случае. Ответ на этот вопрос дадут результаты проведенных расчетов.
2. В рамках используемой модели допускается сравнительно простая формулировка граничных условий.
3. Результаты расчетов на основе f — модели для пристенных течений вязкой несжимаемой жидкости показывают, что модель обеспечивает удовлетворительное их согласование с известными экспериментальными данными.

Список литературы

- [1] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. - 7-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2003. - 840с.
- [2] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. - 712с.
- [3] Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. - 630с.
- [4] Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. II. М.: Наука, 1967-720с.
- [5] Белов И. А., Исаев С. А., Коробков В. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. — Л.: Судостроение, 1989.- 256с.
- [6] Павловский В. А. Краткий курс механики сплошных сред. СПб.: изд. СРБГТУ РП. 1993. - 209с.
- [7] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. I, II. М.: Физматгиз, 1963. - 584, 728с..
- [8] Турбулентность. Принципы и применения./Сборник статей/Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена./пер. с англ. М.: Мир, 1980.
- [9] Бабкин А. В., Селиванов В. В. Основы механики сплошных сред: Учебник для вузов. - 2-е изд., испр. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. - 376с.
- [10] Новожилов В. В., Павловский В. А. Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости: Монография. СПб.: Изд. центр СПбГ-МТУ, 1998. - 484с.
- [11] Белов И. А., Исаев С. А. Моделирование турбулентных течений, 1998.- 106с.
- [12] Reynolds O. On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Phil. Trans Royal Soc.- 1894.-Vol. 186-pp. 123-161.

- [13] Смольяков А. В., Ткаченко В. М. Измерение турбулентных пульсаций. Л. : Энергия, 1980.
- [14] Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. I. СПб.: Гидрометеиздат, 1992 — 693с.
- [15] Короткин А. И., Роговой Ю. А. Метод расчета продольных средних скоростей в пристенных турбулентных течениях несжимаемой жидкости. СПб.: Мор Вест, 2009. — 121с.
- [16] Лукащук С. Ю. Введение в многопоточное программирование и грид-технологии: Учеб. пособие. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа: УГАТУ, 2008. – 132 с.
- [17] Павловский В. А., Шестов К. В. Применение f-модели турбулентности для расчета внутренних задач гидродинамики и тепло-массообмена // Актуальные проблемы морской энергетики: материалы третьей Всероссийской межотраслевой научно-технической конференции. – СПб.: Изд-во СПбГМТУ, 2014. 181 с.
- [18] Макунин А.В. Применение f-модели для расчета пристенных течений несжимаемой вязкой жидкости // Процессы управления и устойчивость. Том 2(18). № 1. СПб.: Издательский дом Федоровой Г.В., 2015. с. 213-216
- [19] Ламб Г. Гидромеханика. М-Л.: ОГИЗ - Гостехиздат. 1947. - 900с.
- [20] Kuethe A. M., Schetzer J. D., Foundations of aerodynamics. John Wiley, New York 1959.
- [21] Jakob M., Heat transfer, т. 1 и 2, John Wiley, New York 1957.
- [22] Новожилов В. В. Теория плоского турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение. 1977. - 165с.
- [23] 88. Reichardt H. Gesetzmäßigkeiten der geradlinigen turbulenten Couette-Strömung Mitt. № 22 des Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung und der AVA Gottingen. 1959.

- [24] Глушко Г. С. Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом//Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. 1971. №4 с. 128-136.
- [25] Коловандин Б. А. Моделирование теплопереноса при неоднородной турбулентности. Минск: Наука и техника. 1980. - 184 с.
- [26] Брайтон Д., Джонс П. Полностью развитый турбулентный поток в каналах кольцевого сечения//Теоретические основы инженерных расчётов. 1964. № 4, с.240-242.
- [27] Helsten A. Some improvements in Menter's $k-\epsilon$ SST turbulence model. Tech, rep., American Institute of Aeronautics and Astronautics (1998). AIAA-98-2554.
- [28] Чистов А.Л. Единая ламинарно-турбулентная дифференциальная модель для течения вязкой несжимаемой жидкости. Вестник СПбГУ. Сер.10. 2008, вып.4, с. 103-106
- [29] Макунин А. В. Расчет стабилизированного изотермического течения жидкости с постоянными физическими свойствами в круглой цилиндрической трубе на основе f-модели турбулентности // Молодой ученый. — 2016. — №7. — С. 104-111.
- [30] Новожилов В. В., Павловский В. А. Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости: 2-е изд., испр. - СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2012. - 453 с.
- [31] Миллионщиков М. Д. Турбулентные течения в пограничном слое и трубах. М.: Наука, 1969. - 52с.
- [32] Robertson J.M., Johnson H. F. Turbulence Structure in plane Couette flow//ASME J. Eng. Mech. Div. 1970. Vol. 96. p. 1171-1182.
- [33] Robertson J.M., Johnson H. F. Turbulence Structure in plane Couette flow//ASME J. Eng. Mech. Div. 1970. Vol. 96. p. 1171-1182.
- [34] Bech K. H., Tillmark N., Alfredsson P. H., Andersson H. I. An investigation of turbulent plane Couette flow at low Reynolds numbers //J. Fluid Mech., Mar 10, 1995. p. 286, 291-325.

- [35] Себеси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. М.: Мир. 1987. - 592с.
- [36] Павловский В. А., Пастухова Е. В., Шестов К. В. Турбулентное установившееся неизотермическое течение жидкости с постоянными физическими свойствами в прямой круговой трубе//Сб. Кораблестроительное образование и наука. 2003. Т.П. СПб. Изд-во СПб ГМТУ. с. 37-43.
- [37] FLUENT 6.3 User's Guide Inc., 2005.
- [38] Wilcox D. C. Turbulence Modeling for CFD. La Canada, California.: DWC Industries Inc., 1998. - 540p.
- [39] Hanjalic K. One-point closure models for buoyancy-driven turbulent flows//Annu. Rev. Fluid Mech. 2002.Vol.34. p.321-347.
- [40] Spalart P. R., Almaras S. R., A one-equation turbulence model for aerodynamic flows//La Rech. Aerospatiale. 1994.Vol.1, p.5-21.
- [41] Launder B.E., Spalding D.B. The Numerical Computation of Turbulent Flows // Сотр. Meth. Appl. Mech. Eng. - 1974. - Vol. 3. - P. 269-289.
- [42] Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987. — 286с.
- [43] Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. - 512с.
- [44] Чистов А. Л. О построении моделей турбулентных течений в пакетах прикладных программ//Процессы управления и устойчивость. Труды XXXVIII международной научной конференции аспирантов и студентов (CPS'07). СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. с.221-226.
- [45] Павловский В. А., Чистов А. Л. Связь между истинной и изотропной диссипациями через осредненные параметры течения//Проблемы экономики топливно-энергетических ресурсов на промпредприятиях и ТЭС: Межвуз. сб. науч. трудов/ГОУВПО СПбГТУ РП. 2007. с.3-4.
- [46] Газизов Р.К., Юлдашев А.В., Ямилева А.М. Опыт использования гибридных вычислительных систем при моделировании линейной сварки

трением // Rational Enterprise Management / Рациональное Управление Предприятием (REM), 2012, № 04/2012, Автоматизация аэрокосмической отрасли – С. 50-52.

- [47] Чистов А. Л. Единая ламинарно-турбулентная дифференциальная модель для течений вязкой несжимаемой жидкости. Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2008, вып.4, с. 103-106.
- [48] Пантакар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с.